ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

HERAUSGEGEBEN VON PROFESSOR R. VON MISES, BERLIN

Unter Mitwirkung von A. FÖPPL-München, G. HAMEL-Charlottenburg, R. MOLLIER-Dresden, H. Müller-Breslau-Charlottenburg, L. PRANDTL-Göttingen und R. RÜDENBERG-Berlin

Band 1 Ende Juni 1921 Heft 3

INHALT:



VERLAG DES VEREINES DEUTSCHER INGENIEURE

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

Bd. 1 **Ende Juni 1921** **Heft 3**

Inhalt:

HAUPTAUFSÄTZE

Betrachtungen über die Planetenbewegung.

Von **O. MOHR** † in Dresden.

Im Nachlasse des am 2. Oktober 1918 verstorbenen Vertreters der technischen Mechanik an der Dresdener Hochschule fand sich der folgende, aus seiner letzten Lebenszeit stammende Aufsatz. Wenn dieser auch seinem mehr didaktischen Inhalt nach sich dem Rahmen der Zeitschrift nur schwer einfügt, so glaubte die Schriftleitung doch, mit der Veröffentlichung einer Ehrenpflicht gegenüber dem um die Wissenschaft hochverdienten Forscher genügen zu sollen.

Die Ansichten Newtons über die Grundbegriffe der Mechanik, über Masse, Beschleunigung, Kraft, Antrieb und Bewegungsgröße hatten ihren Ursprung in den Keplerschen Gesetzen und fanden in diesen auch ihre wichtigste Bestätigung. Diese Erkenntnis ist wohl nicht neu; es scheint jedoch aus mancherlei Gründen nicht überflüssig oder uninteressant, von neuem den Zusammenhang zu erörtern, der zwischen den Keplerschen Gesetzen und den Entdeckungen Newtons besteht. Eine Anregung zu diesem Versuch erblicken wir in dem Umstande, daß heute vor dreihundert Jahren — am 15. Mai 1618 — die Keplerschen Gesetze veröffentlicht wurden[1]).

1. Das erste Keplersche Gesetz. Nach den Anschauungen Newtons konnte das Gesetz der ebenen Bewegung eines materiellen Punktes in folgender Weise dargestellt werden. Es bezeichnen in der Abb. 1 v_1 und v_2 die Geschwindigkeiten des Punktes von der Masse m in den Bahnpunkten R_1 und R_2, also $m v_1$ und $m v_2$ seine Bewegungsgrößen, ferner $P dt$ den Antrieb, den der Massenpunkt auf der unendlich kleinen Bahnstrecke BC während der Zeit dt von der Kraft P er-

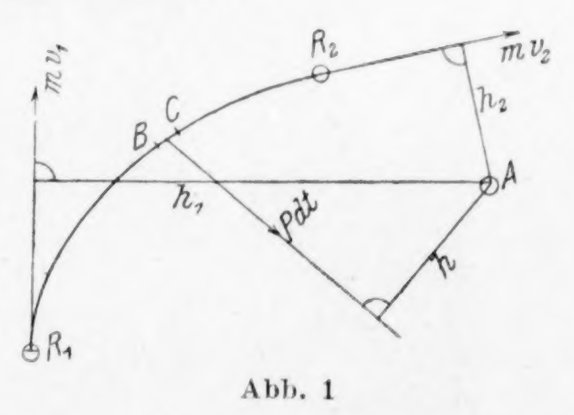


Abb. 1

[1]) 17./27. Mai 1618 Abschluß. (Bemerkung am Schluß von Liber V der Harmonices mundi libri V von Joh. Kepler.)

hält. In bezug auf irgend einen Punkt A der Bahnebene haben die Momente dieser Streckengrößen die algebraischen Werte:

$$N_1 = m v_1 h_1,\ N_2 = m v_2 h_2,\ N = -P dt h \quad \ldots \ldots \quad (1).$$

Das Bewegungsgesetz lautet alsdann:

$$N_2 = N_1 + \Sigma N \quad \ldots \ldots \quad (2),$$

d. h. das Moment N_2 der Bewegungsgröße am Endpunkte R_2 der durchlaufenen Bahnstrecke $R_1 R_2$ bildet die algebraische Summe aus dem Momente N_1 im Anfangspunkte R_1 und der Momentensumme ΣN aller Kraftantriebe, die zwischen R_1 und R_2 von dem materiellen Punkte aufgenommen wurden. Für eine unendlich kleine Bahnstrecke $\overline{RR'}$, die in der Zeit dt durchlaufen wird, hat das Gesetz die Bedeutung, daß die Strecke mv' die geometrische Summe der beiden Strecken mv und Pdt bildet. Daher ist auch die Geschwindigkeit v' die geometrische Summe der beiden Geschwindigkeiten v und $\frac{P dt}{m}$.

Wählt man für die Planetenbewegung den Sonnenmittelpunkt S als Momentenpunkt, so nimmt das Gesetz die Form an:

$$N_2 = N_1 \quad \ldots \ldots \quad (3),$$

weil alle Antriebe Pdt der Anziehungskraft der Sonne durch den Momentenpunkt S gehen. Wir zerlegen die Geschwindigkeit v des Planeten in die beiden Geschwindigkeiten u und w, von denen u auf den Bahnvektor r fällt, während w zu r und u normal gerichtet ist. Bezeichnet α den Winkel (r, v), den der Vektor r im Sinne der Planetenbewegung zu durchlaufen hat, um von r nach v zu gelangen, so ist:

$$u = v \cos \alpha,\ w = v \sin \alpha \quad \ldots \ldots \quad (4),$$

$$N_1 = m r_1 w_1,\ N_2 = m r_2 w_2 \quad \ldots \ldots \quad (5),$$

$$\text{also}\quad r_2 w_2 = r_1 w_1 = r w = f \quad \ldots \ldots \quad (6),$$

wenn mit $\frac{f}{2}$ die Flächengeschwindigkeit des Bahnvektors r, d. h. die Fläche bezeichnet wird, die der Vektor r in der Zeiteinheit bestreicht. Die Gleichung (6) enthält das erste Keplersche Gesetz: der von der Sonne nach dem Planeten gezogene Vektor bestreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen. Dieses Gesetz bestätigte also in einem wichtigen Punkte die Anschauungen Newtons. Das Gesetz kann in einer etwas anderen Form dargestellt werden, wenn man den Abstand der Sonne S von der Bahntangente v mit p bezeichnet. Da $\frac{p}{r} = \frac{w}{v} = \sin \alpha$ ist, so folgt

$$p v = f \quad \ldots \ldots \quad (7).$$

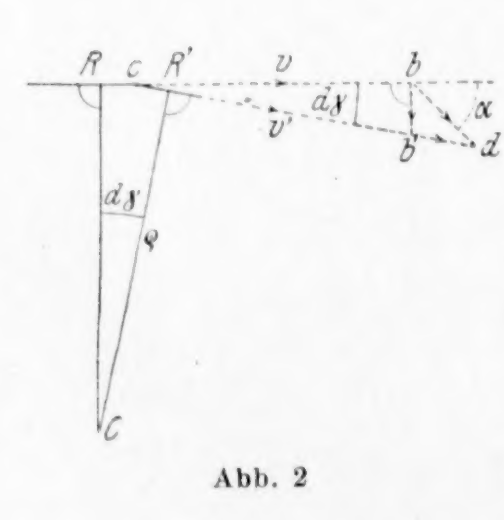


Abb. 2

In Abb. 2 ist die geometrische Summierung der beiden Geschwindigkeiten

$$\overline{cb} = v \quad \text{und} \quad \overline{bd} = \frac{P dt}{m},$$

also auch der drei Geschwindigkeiten

$$\overline{cb} = v,\ \overline{bb'} = \frac{P \sin \alpha\, dt}{m} \quad \text{und} \quad \overline{b'd} = \frac{P \cos \alpha\, dt}{m}$$

zur Summe $\overline{cd} = v'$ dargestellt. In dem zugehörigen Lageplan der unendlich kleinen Bahnstrecke $\overline{RR'} = v dt$ ist der Krümmungshalbmesser $\overline{CR}$ dieser Bahnstrecke mit ϱ bezeichnet. Aus der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke cbb' und CRR' folgt:

$$\frac{P \sin \alpha\, dt}{m} : v = v dt : \varrho,$$

$$\text{also}\quad \frac{P}{m} = \frac{v^2}{\varrho \sin \alpha} \quad \ldots \ldots \quad (8).$$

2. Das zweite Keplersche Gesetz. Jeder Planet bewegt sich in einer Ellipse um die in einem der Brennpunkte stehende Sonne. Aus diesem zweiten Keplerschen Gesetz lassen sich die geometrischen Beziehungen ableiten, die zwischen dem Bahnvektor r und den Geschwindigkeitsvektoren v, u und w bestehen und die im Geschwindigkeitsplan darzustellen sind. Der Lageplan, Abb. 3, zeigt eine ge-

gebene Bahnellipse. $\overline{R_0 R_3} = 2a$ bezeichnet die große Achse, $\overline{R_2 R_4} = 2b$ die kleine Achse und $\overline{MS} = \varepsilon a$ die sogenannte Exzentrizität, d. h. den Abstand der Sonne S vom Mittelpunkt der Ellipse. $\overline{SR_1} = r_1$ ist der Halbparameter der Ellipse, d. h. der von der Sonne S normal zur großen Achse gezogene Bahnvektor. Mit r_0, r_1, r_2 ... werden die Vektoren der Bahnpunkte R_0, R_1, R_2 .... bezeichnet. Der Winkel (r_0, r), der im Sinne der Flächengeschwindigkeit zu durchlaufen ist, um von dem der Sonne zunächst liegenden Bahnpunkte R_0, dem sogenannten Perihel, nach einem gegebenen Bahnpunkte R zu gelangen, wird mit φ bezeichnet. Für die Bahnpunkte R_1, R_2, R_3 .... trägt dieser die Bezeichnung φ_1, φ_2, φ_3 ...

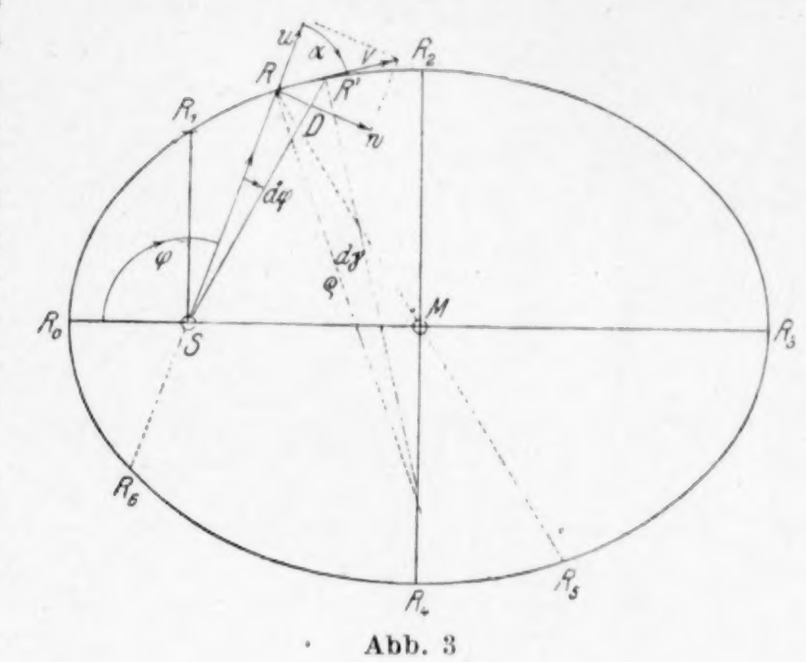


Abb. 3

Der Bahnvektor r. Bezogen auf das Koordinatensystem (r, φ) hat die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte bekanntlich die Form:

$$r = \frac{r_1}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Sie bestimmt als Planetenbahn einen Kreis für $\varepsilon = 0$, eine Ellipse für $0 < \varepsilon < 1$, eine Parabel für $\varepsilon = 1$ und eine Hyperbel für $\varepsilon > 1$. Die aus dieser Gleichung abgeleiteten Eigenschaften der Planetenbewegung gelten also auch dann, wenn die Bahn anstatt einer Ellipse ein anderer Kegelschnitt ist.

Die Hauptabmessungen der Planetenbahn. Für die Endpunkte R_0 und R_3 der großen Achse ist $\varphi_0 = 0$ und $\varphi_3 = 180^0$, daher ist

$$r_0 = \frac{r_1}{1 + \varepsilon}, \quad r_3 = \frac{r_1}{1 - \varepsilon} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

und

$$a = \frac{r_0 + r_3}{2} = \frac{r_1}{1 - \varepsilon^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

Für den Endpunkt R_2 der kleinen Achse ist $\cos \varphi_2 = -\varepsilon$, daher

$$r_2 = \frac{r_1}{1 - \varepsilon^2} = a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

Die drei Seiten a, b, $a\varepsilon$ bilden ein rechtwinkliges Dreieck, daher ist

$$b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2} = \frac{r_1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13),$$

woraus folgt:

$$a : b = b : r_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Der Winkel $\alpha = (r, v)$. In manchen Untersuchungen kommt der Winkel α in Betracht, der vom Bahnvektor r mit der Bahntangente v gebildet wird. Um ihn zu bestimmen, ist in den Lageplan für den Winkel $\varphi + d\varphi$ der Bahnvektor $\overline{SR'} = r' = r + dr$ eingetragen. In dem unendlich kleinen Dreieck RDR' ist also

$$\overline{RD} = r\,d\varphi, \quad \overline{DR'} = dr, \quad \sphericalangle\, RR'D = (r, v) = \alpha, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{r\,d\varphi}{dr}.$$

Die Größe von α kann bestimmt werden durch Differenzieren der Gl. (9). Da ε und r_1 unveränderliche Größen sind, so ist:

$$0 = dr + \varepsilon \cos \varphi\, dr - \varepsilon r \sin \varphi\, d\varphi$$

und folglich

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r\,d\varphi}{dr} = \frac{1 + \varepsilon \cos \varphi}{\varepsilon \sin \varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15).$$

Beispielsweise ist für den Bahnpunkt R_0: $\varphi_0 = 0$ und $\alpha = 90^0$,
R_1: $\varphi_1 = 90^0$ » $\operatorname{tg} \alpha = 1/\varepsilon$,
R_0: $\varphi_3 = 180^0$ » $\alpha = 90^0$.

Aus der Gl. (15) folgt

$$\varepsilon = -\frac{\cos \alpha}{\cos (\varphi + \alpha)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

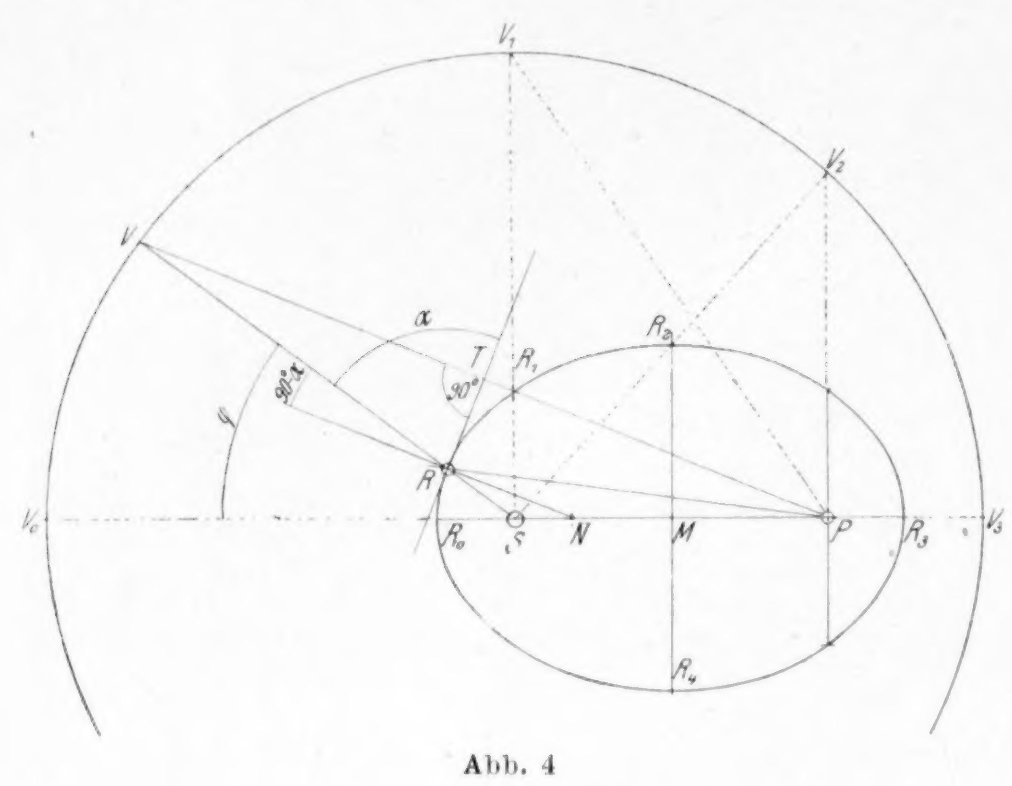


Abb. 4

Diese Gleichung bestimmt die Exzentrizität ε, wenn für irgend einen Bahnpunkt R die beiden Winkel φ und α bekannt sind.

Beziehung zwischen der Normalen n der Bahnellipse, dem Halbparameter r_1 und dem Winkel α. In Abb. 4 bezeichnet S die Sonne, R den Planeten, RT die Tangente und RN die Normale des Bahnpunktes R. Es ist also $\overline{SR} = r$, $\overline{RN} = n$, $\measuredangle RSN = 180^0 - \varphi$, $\measuredangle SRN = 90^0 - \alpha$. Das Dreieck SRN ergibt demnach die Beziehung:

$$\frac{r}{n} = -\frac{\cos(\varphi + \alpha)}{\sin\varphi}.$$

Verbindet man diese Gleichung mit den Gleichungen

$$\frac{r_1}{r} = 1 + \varepsilon\cos\varphi \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9),$$

$$1 + \varepsilon\cos\varphi = \varepsilon\sin\varphi\,\mathrm{tg}\,\alpha \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15),$$

$$\cos(\varphi + \alpha) = -\frac{\cos\alpha}{\varepsilon} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (16),$$

indem man die Produkte der linken und der rechten Seiten der vier Gleichungen bildet, so ergibt sich für jeden Bahnpunkt R:

$$\frac{r_1}{n} = \sin\alpha \quad \ldots \ldots \ldots \quad (17).$$

Die Geschwindigkeiten w, u und v in dem durch den Winkel φ gegebenen Bahnpunkte R. Die Gleichungen (6), (9) und (15):

$$\frac{w}{w_1} = \frac{r_1}{r} = 1 + \varepsilon\cos\varphi = \varepsilon\sin\varphi\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

ergeben:

$$w = w_1(1 + \varepsilon\cos\varphi) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (18)$$

und

$$u = w\,\mathrm{ctg}\,\alpha = \varepsilon w_1 \sin\varphi \quad \ldots \ldots \ldots \quad (19).$$

Für den auf dem Parameter liegenden Bahnpunkt R_1 ist $\varphi = 90^0$, also

$$u_1 = \varepsilon w_1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (20).$$

Daher ist:

$$w = w_1 + u_1\cos\varphi \quad \ldots \ldots \ldots \quad (21)$$

und

$$u = u_1\sin\varphi \quad \ldots \ldots \ldots \quad (22).$$

Die Geschwindigkeit v im Bahnpunkte R bildet die geometrische Summe der beiden Geschwindigkeiten u und w, ihre Größe wird also bestimmt durch die Gleichung:

$$v^2 = u^2 + w^2 = w_1^2(1 + 2\varepsilon\cos\varphi + \varepsilon^2) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (23).$$

3. Der Geschwindigkeitsplan der Planetenbewegung. Erste Darstellung. In Abb. 4 bezeichnet S die Sonne, P den zweiten Brennpunkt der Bahnellipse und R den augenblicklichen Ort des Planeten. Der Kreis $V_0 V V_1 \ldots$ hat den Mittelpunkt S und den Halbmesser $\overline{SV} = 2a$. Der Bahnvektor $\overline{SR}$ des Punktes R trifft diesen Kreis im Punkte V, wodurch der mit $\bar{v}$ bezeichnete Vektor PV bestimmt wird. Das Dreieck PRV ist gleichschenklig, weil $\overline{RP} = \overline{RV} = 2a - r$ ist, und da die Bahntangente RT den Winkel VRP halbiert, so ist der Vektor $\bar{v}$ zur Geschwindigkeit v normal gerichtet. In dem Dreieck SVP ist $\overline{SV} = 2a$, $\overline{SP} = 2a\varepsilon$ und $\measuredangle VSP = 180^0 - \varphi$, demnach hat der Vektor $\bar{v}$ die Länge:

$$\bar{v} = 2a\sqrt{1 + 2\varepsilon\cos\varphi + \varepsilon^2}.$$

Nach Gl. (23) hat die Geschwindigkeit v im Bahnpunkte R die Größe

$$v = w_1 \sqrt{1 + 2\varepsilon \cos\varphi + \varepsilon^2}.$$

Daher ist

$$\frac{v}{\bar{v}} = \frac{2a}{w_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24).$$

Für jeden Bahnpunkt R ist demnach die Größe der Planetengeschwindigkeit v der Länge des Vektors $\bar{v}$ proportional und ihre Richtung steht normal zur Richtung dieses Vektors. In dieser Weise bestimmen die Vektoren $\overline{PV_0}$, $\overline{PV_1}$, $\overline{PV_2}$ . . . des Kreises $V_0 V_1 V_2$ . . . in bezug auf den Pol P die Geschwindigkeiten v_0, v_1, v_2 . . . in den Bahnpunkten R_0, R_1, R_2 . . . Da die Bahnnormale $RN = n$ zum Vektor $\bar{v}$ parallel gerichtet ist, so besteht zwischen diesen beiden Längen die Beziehung:

$$\frac{r}{n} = \frac{2a}{\bar{v}} = \frac{w_1}{v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25).$$

Zweite Darstellung des Geschwindigkeitsplans. In Abb. 5 wird das rechtwinklige Dreieck PU_1V_1 gebildet von den drei Vektoren $\overline{PU_1} = u_1$, $\overline{U_1V_1} = w_1$, $\overline{PV_1} = v_1$, welche nach Größe und Richtung die Geschwindigkeiten u_1, w_1, v_1 im Bahnpunkte R_1 des Parameters darstellen. Der mit (V) bezeichnete Kreis $V_0, V_1, V_2 \dots$ hat den Mittelpunkt U_1 und den Halbmesser $U_1V_1 = w_1$. Der zweite, mit (U) bezeichnete Kreis PUU_1 hat den Durchmesser $PU_1 = u_1$. Um für irgend einen Bahnpunkt R das rechtwinklige Dreieck PUV zu bestimmen, dessen Seiten die Geschwindigkeiten in diesem Punkte $\overline{PU} = \bar{u}$, $\overline{UV} = \bar{w}$, $\overline{PV} = \bar{v}$ nach Größe und Richtung darstellen, ist die Sehne $\overline{PU}$ des Kreises (U) parallel zum Bahnvektor $\overline{SR}$ des Punktes R aufzutragen. Die Gerade U_1UV bestimmt dann den Kreispunkt V. Denn in Uebereinstimmung mit den Gleichungen (19) und (18) ist $\overline{PU} = u = u_1 \sin\varphi$ und $\overline{UV} = w = \overline{U_1V} - \overline{U_1U} = w_1(1 + \varepsilon\cos\varphi)$. Es ist hierbei zu beachten, daß die Vektoren r_0 und w_1 parallel gerichtet sind, und daß also der Winkel $\overline{U_1PU}$ gleich $\varphi - 90^0$ ist.

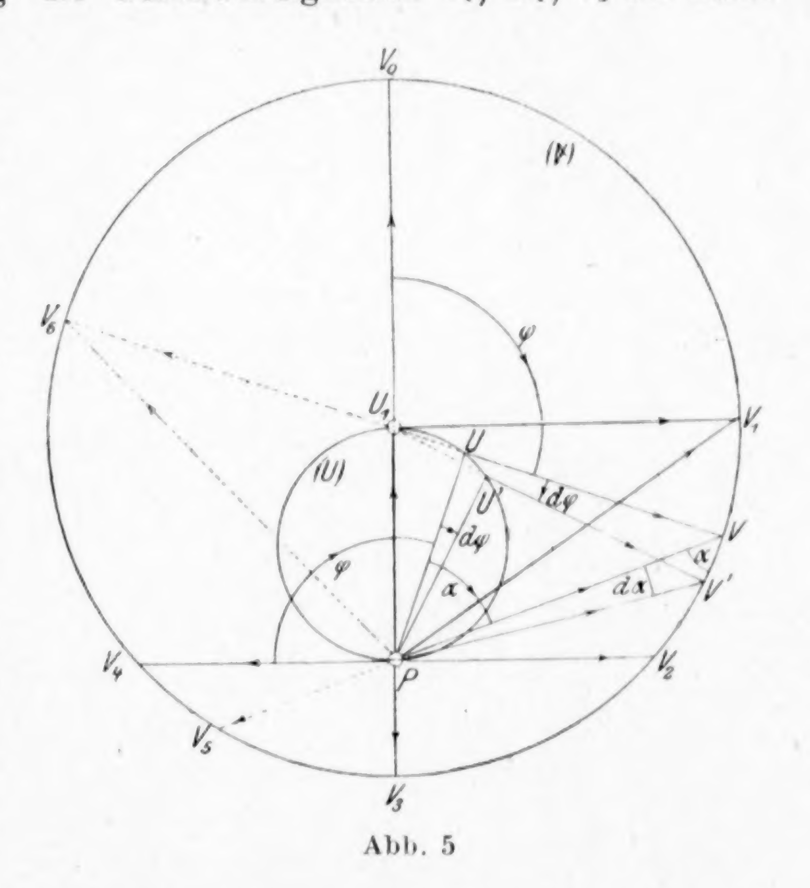


Abb. 5

Ergebnisse des Geschwindigkeitsplanes. Die Grenzwerte der Geschwindigkeiten u, w und v. Die Geschwindigkeit $u = \varepsilon w_1 \sin\varphi$ erhält ihren größten Wert $u_1 = \varepsilon w_1$ für $\varphi = 90^0$, also im Bahnpunkte R_1 des Parameters. Die kleinsten Werte Null werden in den Bahnpunkten R_0 und R_3 der großen Achse erreicht, in denen φ gleich 0 und 180^0 ist. Die Geschwindigkeit $w = w_1(1 + \varepsilon\cos\varphi)$ erreicht ihre Grenzwerte $w_1(1 + \varepsilon)$ und $w_1(1 - \varepsilon)$ in den Bahnpunkten R_0 und R_3 der großen Achse, in denen φ gleich 0 und 180^0 ist. Gleichzeitig erreicht auch die Geschwindigkeit v diese Grenzwerte.

Die Geschwindigkeit v_2 in den Bahnpunkten R_2 und R_4 der kleinen Achse

$$v_2 = v_4 = \frac{f}{b} = \frac{r_1 w_1 \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{r_1} = w_1 \sqrt{1 - \varepsilon^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26),$$

spielt, wie sich zeigen wird, in den Gesetzen der Planetenbewegung eine hervorragende Rolle. Eine Beziehung, die bei Erörterung des dritten Keplerschen Gesetzes in Betracht kommen wird, ergibt sich aus der Gl. (11), nämlich

$$a v_2^2 = r_1 w_1^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27).$$

Im Bahnpunkte R_1 des Parameters ist

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{w_1}{u_1} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Die Planetenbahn ist demnach eine Ellipse, eine Parabel oder ein Hyperbelzweig, je nachdem u_1 kleiner, gleich oder größer ist als w_1. Im ersten Falle liegt der Pol P des Geschwindigkeitsplans innerhalb des Kreises (V), im zweiten liegt er auf diesem Kreise und im dritten außerhalb desselben. In dem besonderen Falle, wenn u_1 gleich null ist, fällt P mit dem Mittelpunkte U_1 des Kreises (V) zusammen, und die Planetenbahn ist also ein Kreis.

In zwei Bahnpunkten R und R_5, die auf einem Ellipsendurchmesser liegen, sind die Bahntangenten v und v_5 parallel gerichtet. Die beiden Vektoren $\overline{PV}$ und $\overline{PV_5}$ bilden also eine durch den Pol P gehende Sehne VPV_5 des Kreises (V) und ihre Größen v und v_5 entsprechen der Bedingung

$$\overline{v} \cdot \overline{v_5} = \overline{v_2}^2 \qquad (29).$$

In zwei Bahnpunkten R und R_6, deren Sehne $\overline{RR_6}$ durch die Sonne S geht, fallen die beiden Bahnvektoren r und r_6 auf eine Gerade. Für zwei solche Punkte ist daher

$$u = u_6$$

und

$$w + w_6 = \overline{UV} + \overline{UV_6} = \overline{VV_6} = 2w_1 \qquad (30).$$

Die Exzentrizität ε. Nach den vorstehenden Gleichungen ist:

$$1 - \varepsilon^2 = \frac{r_1}{a} = \frac{r_1^2}{b^2} = \frac{v_2^2}{w_1^2} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Daher ist

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{a - r_1}{a}} = \frac{\sqrt{b^2 - r_1^2}}{b} = \frac{\sqrt{w_1^2 - v_2^2}}{w_1} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \qquad (31).$$

Beziehung zwischen den Geschwindigkeiten v, u_1 und w_1. In dem Dreieck PU_1V des Geschwindigkeitsplanes ist

$$\overline{PU_1} = \overline{u_1},\quad \overline{U_1V} = w_1,\quad \overline{PV} = v,\quad \measuredangle PU_1V = 180^0 - \varphi.$$

Daher ist

$$v^2 = \overline{u_1}^2 + \overline{w_1}^2 + 2\,\overline{u_1}\,\overline{w_1} \cos\varphi \qquad (32).$$

In jedem Bahnpunkte R bildet also die Geschwindigkeit v die geometrische Summe zweier Vektoren von den Größen u_1 und w_1, die nach Richtung und Sinn mit den Geschwindigkeiten u_1 und w übereinstimmen.

4. Das dritte Keplersche Gesetz. Die Umlaufzeiten der Planeten verhalten sich zueinander wie die dritten Potenzen ihrer großen Bahnachsen: Da die Fläche der Bahnellipse gleich $ab\pi$ und die Flächengeschwindigkeit des Bahnvektors gleich $\frac{bv_2}{2}$ ist, so hat die Umlaufzeit T die Dauer

$$T = \frac{2\,ab\pi}{bv_2} = \frac{2\,a\pi}{v_2} \qquad (33).$$

Sie ist ebenso groß wie die Umlaufzeit eines Punktes, der mit der unveränderlichen Geschwindigkeit v_2 einen Kreis vom Halbmesser a durchläuft. Mit Beachtung der Gl. (27) ergibt sich:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{a\,v_2^2}{4\pi^2} = \frac{r_1 w_1^2}{4\pi^2} \qquad (34).$$

Das dritte Keplersche Gesetz bestimmt demnach, daß nicht nur die Größe $\frac{4\,a^3\pi^2}{T^2}$, sondern auch die beiden Größen av_2^2 und $r_1w_1^2$ für alle Planeten des Sonnensystems einen unveränderlichen Wert μ haben:

$$\mu = av_2^2 = r_1 w_1^2 = fw_1 = \frac{f^2}{r_1} = \frac{4\,a^3\pi^2}{T^2} \qquad (35).$$

Der Zahlenwert dieser Größe kann aus den Angaben über die Bewegung der Erde abgeleitet werden, für die

$$a = 1.485 \cdot 10^{13}\ \mathrm{cm}$$

und

$$T = 365{,}25 \cdot 86400 = 3{,}156 \cdot 10^7\ \mathrm{sec}$$

ist. Hieraus ergibt sich:

$$\mu = \frac{4\,a^3\pi^2}{T^2} = 1{,}30 \cdot 10^{26}\ \mathrm{cm}^3 \cdot \mathrm{sec}^{-2} \qquad (36).$$

Die Abhängigkeit der Planetenbahn von der Größe rv^2 in irgend einem Bahnpunkte. Nach Gl. (23) ist

$$v^2 = w_1^2 (2 + 2 \cos \varphi) + w_1^2 (\varepsilon^2 - 1).$$

Beachtet man die beiden Gleichungen (9) und (35), so folgt

$$r v^2 = 2 \mu + r w_1^2 (\varepsilon^2 - 1) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (37).$$

Die Größe $r w_1^2 (\varepsilon^2 - 1)$ ist negativ, gleich Null oder positiv, je nachdem ε kleiner, gleich oder größer ist als Eins. Daher ist die Bahn eine Ellipse, eine Parabel oder ein Hyperbelzweig, je nachdem für irgend einen Bahnpunkt rv^2 kleiner, gleich oder größer ist als $2 \mu = 2{,}60 \cdot 10^{26} \text{ cm}^3 \cdot \text{sec}^{-2}$.

Die Abhängigkeit der Planetengeschwindigkeit v von den Vektoren r und r_2 der Bahnpunkte R und R_2 der elliptischen Planetenbahn. Aus den Gleichungen (37) und (26) folgt:

$$v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{r_2}\right) = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) = \frac{\mu}{a} \, \frac{2a - r}{r} = v_2^2 \, \frac{2a - r}{r} \quad \ldots \quad (38).$$

Die Endpunkte R_2 und R_4 der kleinen Achse sind also die einzigen Bahnpunkte, in denen die Geschwindigkeit v_2 durch den Vektor $r_2 = a$ dieser Punkte bestimmt ist:

$$v_2^2 = \frac{\mu}{r_2} = \frac{\mu}{a},$$

wie bereits die Gl. (26) ergeben hat. Für jeden anderen Bahnpunkt R ist:

$$\frac{v^2}{v_2^2} = \frac{2a - r}{r} = \frac{PR}{SR} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (39),$$

wenn der zweite Brennpunkt der Bahnellipse mit P bezeichnet wird (Abb. 4). In der ersten Ellipsenhälfte $R_4 R_0 R_2$, in der die Sonne S liegt, ist v^2 im Verhältnis $(2a - r) : r$ **größer** als v_2^2, in der anderen Hälfte $R_2 R_3 R_4$ ist v^2 im Verhältnis $(2a - r) : r$ **kleiner** als v_2^2. In den beiden Bahnpunkten R_2 und R_4 ist die Geschwindigkeit

$$v = v_2 = \sqrt{\frac{\mu}{r_2}} = \sqrt{\frac{\mu}{a}}$$

ebenso groß wie die Geschwindigkeit eines Planeten, der in einem Kreise vom Halbmesser $r_2 = a$ sich bewegt.

Die Kometengeschwindigkeit. Da die Achse a einer Parabel unendlich lang ist, so ist die Geschwindigkeit k eines Kometen, der auf parabolischer Bahn sich bewegt, in jedem Punkte allein abhängig von dem Bahnvektor r:

$$k = \sqrt{\frac{2\mu}{r}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (40).$$

Einem jeden Punkte des Raumes entspricht demnach eine bestimmte Kometengeschwindigkeit k. Zwischen den Geschwindigkeiten v und v_2 eines Planeten in den Punkten R und R_2 seiner elliptischen Bahn und der Kometengeschwindigkeit k, die dem Raumpunkte R entspricht, besteht die einfache Beziehung

$$k^2 = v^2 + v_2^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (41).$$

5. Zahlenbeispiel. Die Bewegung eines Planeten ist vollständig bestimmt, wenn für irgend einen Bahnpunkt die in der Bahnebene liegenden drei Vektoren r, u und w bekannt sind. Für den Bahnpunkt R des in den Abb. 3 und 5 dargestellten Beispiels seien gegeben: $r = 2{,}50 \cdot 10^{13}$ cm, $u = 1{,}60 \cdot 10^6 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1}$, $w = 2{,}00 \cdot 10^6 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1}$. Hierdurch werden zugleich bestimmt die Größen:

$$v^2 = u^2 + w^2 = 6{,}56 \cdot 10^{12} \text{ cm}^2 \cdot \text{sec}^{-2}, \quad v = 2{,}56 \cdot 10^6 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1},$$
$$f = rw = 5{,}00 \cdot 10^{19} \text{ cm}^2 \cdot \text{sec}^{-1}, \quad rv^2 = 1{,}64 \cdot 10^{26} \text{ cm}^3 \cdot \text{sec}^{-2}$$

Da rv^2 kleiner ist als $2 \mu = 2{,}60 \cdot 10^{26} \text{ cm}^3 \cdot \text{sec}^{-2}$, so ist die zu berechnende Bahn eine **Ellipse**. Von den maßgebenden Größen sind **drei**: nämlich die Geschwindigkeit v_2 im Endpunkte R_2 der kleinen Bahnachse, ferner die Länge $2a$ der großen Bahnachse und die Umlaufzeit T unabhängig von der Richtung der Geschwindigkeit v im Bahnpunkte R und nur abhängig von deren Größe. Nach den Gleichungen (38), (35) und (33) ist

$$v_2{}^2 = \frac{2\,\mu}{r} - v^2 = \frac{2{,}60 \cdot 10^{26}}{2{,}50 \cdot 10^{13}} - 6{,}56 \cdot 10^{12} = 3{,}84 \cdot 10^{12}\,\mathrm{cm}^2 \cdot \mathrm{sec}^{-2},$$

$$v_2 = 1{,}96 \cdot 10^6\,\mathrm{cm} \cdot \mathrm{sec}^{-1},$$

$$a = \frac{\mu}{v_2{}^2} = \frac{1{,}30 \cdot 10^{26}}{3{,}84 \cdot 10^{12}} = 3{,}39 \cdot 10^{13}\,\mathrm{cm},$$

und

$$T = \frac{2\,a\,\pi}{v_2} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 3{,}39 \cdot 10^{13}}{1{,}96 \cdot 10^6} = 1{,}09 \cdot 10^8\,\mathrm{sec}.$$

Man stelle sich vor, daß von dem Punkte R aus eine Anzahl Planeten gleichzeitig und ohne einander zu stören, in verschiedenen Richtungen ihren Lauf mit der Geschwindigkeit

$$v = 2{,}56 \cdot 10^6\,\mathrm{cm} \cdot \mathrm{sec}^{-1}$$

beginnen. Alle diese Planeten würden gleichzeitig und zwar nach einer Umlaufsdauer von

$$T = 1{,}09 \cdot 10^8\,\mathrm{sec}$$

zum Ausgangspunkte R zurückkehren. Sie würden in Ellipsen sich bewegen, deren große Achsen in der Länge

$$2\,a = 6{,}78 \cdot 10^{13}\,\mathrm{cm}$$

übereinstimmen, und in den Endpunkten ihrer kleinen Bahnachsen würden die Planeten alle dieselbe Geschwindigkeit

$$v_2 = 1{,}96 \cdot 10^6\,\mathrm{cm} \cdot \mathrm{sec}^{-1}$$

haben. In Abb. 6 ist B der zweite Brennpunkt einer dieser Bahnellipsen. Von der Verlängerung des Bahnvektors RB wird sie im Punkte R' getroffen. TRV und $T'R'V'$ sind die Tangenten der Bahnpunkte R und R'. Demnach ist

$$\sphericalangle\, \overline{RR'T'} = \sphericalangle\, \overline{SR'V'}$$

und

$$\overline{RR'} + \overline{SR'} = 4\,a - r.$$

Man ersieht hieraus, daß die Gerade $TR'V'$ im Punkte R' auch von einer Ellipse berührt wird, deren Brennpunkte mit den Punkten S und R zusammenfallen, und deren große Achse die Länge $4\,a - r$ hat. Diese Ellipse umhüllt demnach die in Rede stehenden Bahnellipsen, die in der Ebene SRR' liegen.

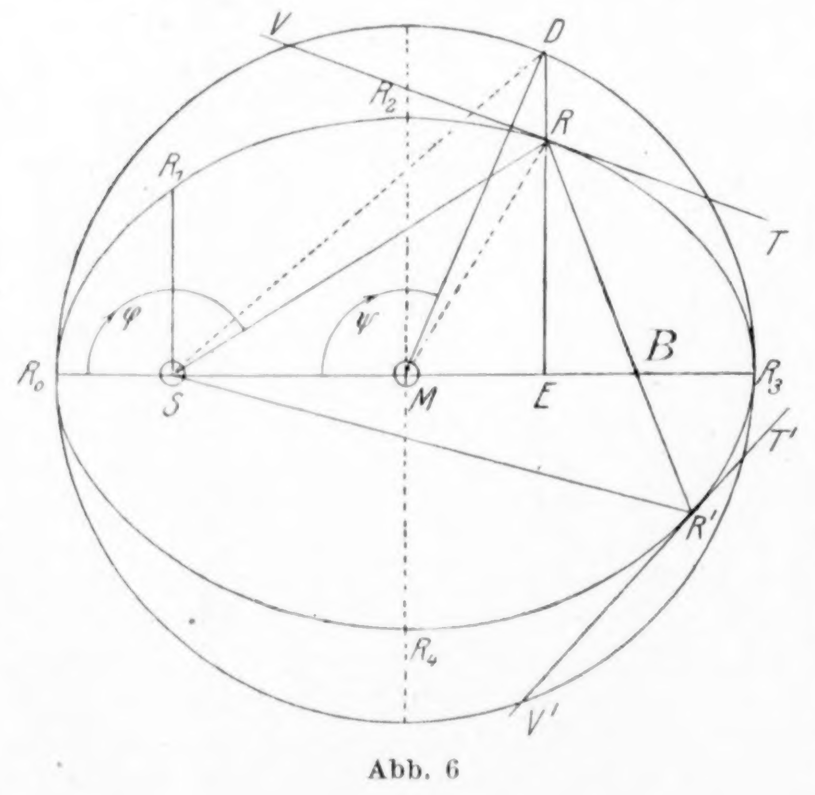


Abb. 6

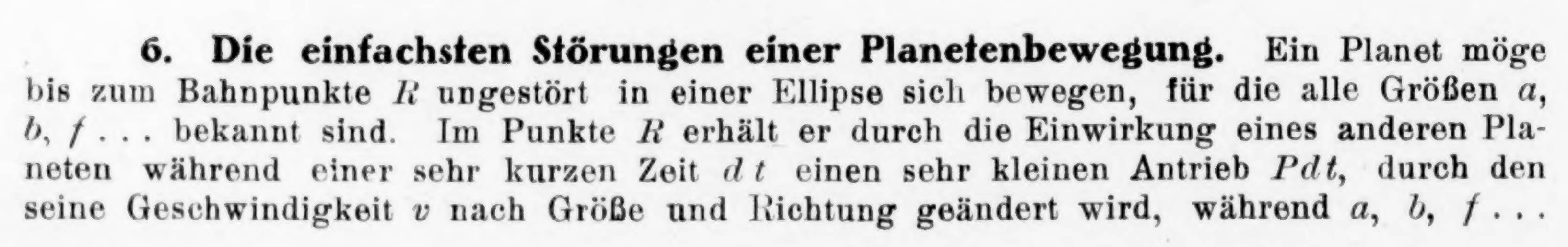
Für die Berechnung der übrigen maßgebenden Größen des Zahlenbeispiels ist die Kenntnis auch der Richtung der Geschwindigkeit v im Bahnpunkte R erforderlich. Dieselbe wird durch die beiden gegebenen Vektoren u und w bestimmt. Nach den Gleichungen, deren Nummern hierneben angegeben sind, ergibt sich:

$$b = \frac{f}{v_2} = \frac{5{,}00 \cdot 10^{19}}{1{,}96 \cdot 10^6} = 2{,}56 \cdot 10^{13}\,\mathrm{cm} \quad \ldots \quad (6),$$

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{3{,}39^2 - 2{,}56^2}}{3{,}39} = 0{,}66 \quad \ldots \quad (31),$$

$$r_1 = a(1 - \varepsilon^2) = 3{,}39 \cdot 10^{13}(1 - 0{,}66^2) = 1{,}91 \cdot 10^{13}\,\mathrm{cm} \quad \ldots \quad (11),$$

$$\cos\varphi = \frac{r_1 - r}{\varepsilon\, r} = \frac{1{,}91 - 2{,}50}{0{,}66 \cdot 2{,}50} = -0{,}36 \qquad \varphi = 111^0 \quad \ldots \quad (9).$$



6. Die einfachsten Störungen einer Planetenbewegung. Ein Planet möge bis zum Bahnpunkte R ungestört in einer Ellipse sich bewegen, für die alle Größen a, b, f . . . bekannt sind. Im Punkte R erhält er durch die Einwirkung eines anderen Planeten während einer sehr kurzen Zeit dt einen sehr kleinen Antrieb Pdt, durch den seine Geschwindigkeit v nach Größe und Richtung geändert wird, während a, b, f . . .

in $(a + da)$, $(b + db)$, $(f + df)$ .... sich verwandeln. Wenn die Störung aus diesem einzigen Antriebe besteht, so wird der Planet nach Ueberschreitung des Bahnpunktes R ungestört sich fortbewegen in einer zweiten Ellipse, die mit der ersten den Punkt R gemein hat. Eine solche Störung läßt sich stets zerlegen in zwei einfachere Störungen, von denen die erste nur die Richtung und die zweite nur die Größe der Geschwindigkeit v im Bahnpunkte R ändert. Wir nehmen an, daß es sich um den Bahnpunkt R der im vorstehenden Zahlenbeispiel betrachteten Bewegung handelt.

Die erste Störung. Der Antrieb $Pdt = m\Delta v$ fällt mit der Normalen des Bahnpunktes R zusammen, verwandelt also die Geschwindigkeit v in die geometrische Summe von v und Δv und die Flächengeschwindigkeit f des Bahnvektors in $f + df$. Beispielsweise sei

$$\frac{df}{f} = + 10^{-4}, \text{ also } df = 5 \cdot 10^{15} \text{ cm}^2 \cdot \text{sec}^{-1}.$$

Da die Geschwindigkeit v im Punkte R nur ihre Richtung, nicht ihre Größe ändert, so bleiben auch die Größen v_2, a und T unverändert. Im vorliegenden Falle ist daher

$$dv_2 = 0, \; da = 0, \; dT = 0 \quad \dots\dots\dots \quad (42).$$

Die übrigen mit der Störung verbundenen Aenderungen lassen sich in einer Reihenfolge ermitteln, in der jede neue Gleichung nur eine Unbekannte enthält.

Die Aenderung der kleinen Halbachse b der Bahnellipse. Nach Gl. (6) ist für die erste Bahnellipse $bv_2 = f$ und für die zweite $(b + db)v_2 = f + df$, woraus folgt:

$$\frac{db}{b} = \frac{df}{f} = 10^{-4}, \; db = + 2{,}56 \cdot 10^9 \text{ cm} \quad \dots\dots \quad (43).$$

Man gelangt zu dieser Beziehung also durch Differenzieren der Gl. (6), wobei zu beachten ist, daß im vorliegenden Falle v_2 eine unveränderliche Größe bezeichnet.

Die Änderung der Exzentrizität. Nach Gl. (31) ist $a^2\varepsilon^2 = a^2 - b^2$. Hier ist a eine unveränderliche Größe, daher

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = - \frac{b^2}{a^2 - b^2}\frac{db}{b} = - \frac{1 - \varepsilon^2}{\varepsilon^2}\frac{df}{f} \quad \dots\dots \quad (44),$$

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = - \frac{1 - 0{,}66^2}{0{,}66^2} 10^{-4} = - 1{,}30 \cdot 10^{-4}, \; d\varepsilon = - 8{,}56 \cdot 10^{-5}.$$

Die Änderung des Halbparameters r_1. Nach Gl. (35) ist $\mu r_1 = f^2$, folglich

$$\frac{dr_1}{r_1} = 2\frac{df}{f} = 2 \cdot 10^{-4}, \; dr_1 = + 3{,}82 \; 10^9 \text{ cm} \quad \dots\dots \quad (45).$$

Die Aenderung des Winkels φ. Nach Gl. (9) ist $r\varepsilon \cos\varphi = r_1 - r$. Der Winkel $\varphi = (r_0, r)$ bezeichnet die Drehung, die der Bahnvektor im Sinne der Flächengeschwindigkeit von r_0 bis r auszuführen hat. Da der Bahnpunkt R den beiden Ellipsen vor und nach der Störung angehört, so ist r eine unveränderliche Größe und die Änderung $d\varphi$ infolge der Störung bezeichnet die Drehung, die der Vektor r_0, also die große Bahnachse dem Sinne der Flächengeschwindigkeit entgegen durch die Störung erleidet. Differentiation der Gl. (9) ergibt

$$d\varphi = \text{cotg}\,\varphi \left(\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} - \frac{dr_1}{r_1 - r}\right) \quad \dots\dots \quad (46),$$

$$d\varphi = - 0{,}38 \left(- 1{,}30 - \frac{3{,}82}{1{,}91 - 2{,}50}\right)10^{-4} = - 1{,}96 \cdot 10^{-4}.$$

Da $d\varphi$ negativ ist, so dreht sich die Hauptachse infolge der Störung im Sinne der Flächengeschwindigkeit um den Winkel $d\varphi = 0{,}000196$.

Die zweite Störung. Der Antrieb $Pdt = mdv$ fällt nach Richtung und Sinn mit der Geschwindigkeit v im Bahnpunkte R zusammen. Hierdurch ist die Größenänderung dv gegeben, während die Richtung von v sich nicht ändert. Beispielsweise sei

$$\frac{dv}{v} = + 10^{-4}, \text{ also } dv = 256 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1}.$$

Die Änderung der großen Halbachse a ergibt sich durch Differenzieren der Gleichung (38)

$$v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) = \mu\frac{2a - r}{ar},$$

in der μ und r unveränderliche Größen bezeichnen:

$$\frac{da}{a} = 2\,\frac{2a-r}{r}\,\frac{dv}{v} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (47)$$

$$\frac{da}{a} = 2\,\frac{6{,}78-2{,}50}{2{,}50}\,10^{-4} = 3{,}42\cdot 10^{-4},\ da = +\,3{,}39\cdot 3{,}42\cdot 10^{9} = +\,1{,}16\cdot 10^{10}\,\text{cm}.$$

Die Änderung der Flächengeschwindigkeit f. Da die Geschwindigkeit v im Bahnpunkte R in beiden Ellipsen die gleiche Richtung hat, so ändert sich f in demselben Verhältnis wie v:

$$\frac{df}{f} = \frac{dv}{v} = 10^{-4},\ df = 5{,}00\cdot 10^{19}\cdot 10^{-4} = 5\cdot 10^{15}\,\text{cm}^2\cdot\text{sec}^{-1} \quad . \quad . \quad (48).$$

Die Änderung des Halbparameters $r_1 = \frac{f^2}{\mu}$ (Gl. 35)

$$\frac{dr_1}{r_1} = \frac{2\,df}{f} = 2\,\frac{dv}{v} = 2\cdot 10^{-4},\ dr_1 = 2\cdot 10^{-4}\cdot 1{,}91\cdot 10^{13} = 3{,}82\cdot 10^{9}\,\text{cm} \quad (49).$$

Die Änderung der Exzentrizität ε. Nach Gl. (11) ist $r_1 = a(1-\varepsilon^2)$, folglich $dr_1 = (1-\varepsilon^2)\,da - 2a\varepsilon\,d\varepsilon$ und

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{1-\varepsilon^3}{2\varepsilon^2}\left(\frac{da}{a} - \frac{dr_1}{r_1}\right) = \frac{1-0{,}66^2}{2\cdot 0{,}66^2}(3{,}42-2{,}00)\,10^{-4} = +\,0{,}92\cdot 10^{-4} \quad . \quad (50).$$

Die Änderung des Winkels $\varphi = (r_0, r)$. Differentiation der Gleichung (9) ergibt:

$$d\varphi = \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}\,\text{cotg}\,\varphi - \frac{dr_1}{r\,\varepsilon\sin\varphi} = -\,0{,}92\cdot 10^{-4}\cdot 0{,}38 - \frac{3{,}72\cdot 10^{-4}}{2{,}50\cdot 0{,}66\cdot 0{,}93} = -\,2{,}84\cdot 10^{-4} \quad (51).$$

Da $d\varphi$ negativ ist, so dreht sich die Hauptachse der Bahnellipse infolge der Störung im Sinne der Flächengeschwindigkeit um den Winkel $d\varphi = 2{,}84\cdot 10^{-4}$.

Die Änderung der Geschwindigkeit v_2. Die Differentiation der Gleichung (35) ergibt:

$$\frac{dv_2}{v_2} = -\,{}^1/_2\,\frac{da}{a} = -\,1{,}71\cdot 10^{-4},\ dv_2 = -\,1{,}71\cdot 1{,}96\cdot 10^{2} = -\,335\,\text{cm}\cdot\text{sec}^{-1} \quad (52).$$

Die Änderung der kleinen Bahnachse. Nach Gl. (6) ist $bv_2 = f$, folglich

$$\frac{dv_2}{v_2} + \frac{db}{b} = \frac{df}{f} = \frac{dv}{v} = 10^{-4}.$$

$$\frac{db}{b} = \frac{dv}{v} - \frac{dv_2}{v_2} = (1+1{,}71)\,10^{-4} = +\,2{,}71\cdot 10^{-4},\ db = 2{,}71\cdot 2{,}56\cdot 10^{9} = 6{,}94.10^{9}\,\text{cm} \quad (53).$$

Die Änderung der Umlaufzeit T. Nach Gl. (33) ist $Tv_2 = 2a\pi$, also

$$\frac{dT}{T} = -\,\frac{dv_2}{v_2} + \frac{da}{a} = {}^3/_2\,\frac{da}{a} = +\,5{,}13\cdot 10^{-4},\ dT = +\,5{,}13\cdot 1{,}09\cdot 10^{4} = 5{,}59\cdot 10^{4}\,\text{sec} \quad (54).$$

7. Die Zeitdauer für den Weg $\overline{R_0R}$. Die Zeitdauer t, in der ein Planet den Weg $\overline{R_0R}$ von dem der Sonne zunächst liegenden Punkte R_0 nach dem durch den Winkel $\varphi = R_0SR$ bestimmten Bahnpunkte R zurücklegt, ist nach dem ersten Keplerschen Gesetze:

$$t = \frac{2\,\text{Fläche}\,\overline{R_0SR}}{f} = \frac{2\,\overline{R_0SR}}{bv_2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (55).$$

Um die Berechnung dieser Größe zu vereinfachen, ist im Lageplan, Abb. 6, die Ordinate $\overline{ER}$ des Bahnpunktes R verlängert, bis sie im Punkte D den Kreis vom Durchmesser $\overline{R_0R_3}$ trifft und dadurch den Zentriwinkel

$$\psi = R_0MD$$

bestimmt. Zwischen den in Betracht kommenden Flächen besteht die Beziehung:

$$\overline{R_0SR} = \overline{R_0MR} - \overline{SMR} = \frac{b}{a}\,(\overline{R_0MD} - \overline{SMD}) = \frac{ab}{2}\,(\psi - \varepsilon\sin\psi).$$

Demnach ist:

$$t = \frac{a}{v_2}\,(\psi - \varepsilon\sin\psi) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (56)$$

und der Winkel τ, der bei unveränderlicher Winkelgeschwindigkeit $\frac{v_2}{a}$ in der Zeit t durchlaufen wird:

$$\tau = \frac{tv_2}{a} = \psi - \varepsilon\sin\psi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (57).$$

Die Astronomen nennen φ die **wahre Anomalie** der Planeten, ψ die **exzentrische** und τ die **mittlere Anomalie**. Die berühmte Gleichung (57) wird nach ihrem Urheber die Keplersche Gleichung genannt. Sie enthält die Beziehung zwischen der mittleren und der exzentrischen Anomalie. Die Beziehung zwischen der exzentrischen und der wahren Anomalie ist aus dem Lageplan zu entnehmen:

$$\overline{SE} = r \cos \varphi = a \cos \psi - a\varepsilon \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (58).$$

In Verbindung mit den Gleichungen (9) und (11) folgt hieraus:

$$\cos \psi = \frac{\varepsilon + \cos \varphi}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (59)$$

und

$$\cos \varphi = \frac{\cos \psi - \varepsilon}{1 - \varepsilon \cos \psi} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (60).$$

Wird in die Formel

$$\frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} = \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}$$

der vorstehende Wert von $\cos \varphi$ eingesetzt, so ergibt sich

$$\frac{\operatorname{tg}^2 \frac{\psi}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (61).$$

In dem rechtwinkligen Dreieck MSR_2 bezeichnen wir den Winkel $\overline{MSR_2}$ mit β. Es ist also

$$\sin \beta = \frac{b}{a}, \quad \cos \beta = \frac{\varepsilon a}{a} = \varepsilon$$

und

$$\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} = \frac{1 - \cos \beta}{1 + \cos \beta} = \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}.$$

Demnach ist für jeden Bahnpunkt:

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{\psi}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (62),$$

wodurch in einfachster Form die Beziehung zwischen der exzentrischen und der wahren Anomalie dargestellt wird. Im Zahlenbeispiel ist

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}} = \sqrt{\frac{34}{166}} = 0{,}4526.$$

In diesem Beispiel ist also für jeden Bahnpunkt:

$$\operatorname{tg} \frac{\psi}{2} = 0{,}4526 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}.$$

Nachdem der Winkel ψ durch Gl. (59) bestimmt worden ist, ergibt Gl. (56) die Zeitdauer t des Weges $R_0 R$. Im Zahlenbeispiel war $\varepsilon = 0{,}66$, $\varphi = 111^0$, $\cos \varphi = -0{,}36$, $a = 3{,}39 \cdot 10^{13}$ cm, $v_2 = 1{,}96 \cdot 10^6$ cm $\cdot$ sec^{-1}, demnach:

$$\cos \psi = \frac{0{,}66 - 0{,}36}{1 - 0{,}66 \cdot 0{,}36} = +0{,}39, \quad \psi = 67^0$$

$$\tau = \psi - \varepsilon \sin \psi = 1{,}17 - 0{,}66 \cdot 0{,}92 = 0{,}56$$

$$t = \frac{\tau a}{v_2} = \frac{0{,}56 \cdot 3{,}39 \cdot 10^{13}}{1{,}96 \cdot 10^6} = 9{,}68 \cdot 10^6 \text{ sec.}$$

Beziehung zwischen den Größen r, a und ψ. Nach den Gleichungen (58) und (60) ist:

$$r \cos \varphi = a (\cos \psi - \varepsilon) = \frac{r (\cos \psi - \varepsilon)}{1 - \varepsilon \cos \psi}.$$

Hieraus folgt:

$$r = a (1 - \varepsilon \cos \psi) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (63).$$

Bestimmung des Ortes R des Planeten für eine gegebene Zeitdauer t des Weges $\overline{R_0 R}$. Die Aufgabe: aus der gegebenen mittleren Anomalie τ die wahre Anomalie φ zu bestimmen, wurde bereits von Kepler behandelt und wird nach ihm das

Keplersche Problem genannt. Eine direkte Lösung dieser Aufgabe durch die Keplersche Gleichung

$$\tau = \psi - \varepsilon \sin \psi$$

ist wegen der transzendenten Form dieser Gleichung nicht möglich. Wir geben zunächst eine graphische Lösung. Abb. 7 ist eine graphische Darstellung der Keplerschen Gleichung. Die Kurvenpunkte R_2, R_3, R_4.... werden bestimmt durch die Abszissen $\psi_2 = \overline{A_0 A_2}$, $\psi_3 = \overline{A_0 A_3}$, $\psi_4 = \overline{A_0 A_4}$.... und durch die Ordinaten $\tau_2 = \overline{A_2 R_2}$, $\tau_3 = \overline{A_3 R_3}$, $\tau_4 = \overline{A_4 R_4}$.... Der gemeinschaftliche Maßstab dieser Zahlengrößen ist durch die beiden gleich großen Längen:

$$\overline{A_0(A_0)} = \overline{(A_0)(R_0)} = 2\pi = 6{,}28$$

gegeben. Mit Hilfe dieser Zeichnung wird der Ort R des Planeten für einen gegebenen Zeitpunkt t bestimmt, indem man den Kurvenpunkt R mit der Ordinate $\overline{AR} = \tau = \frac{t v_2}{a}$ ermittelt. Die zugehörige Abszisse $\psi = \overline{A_0 A}$ ergibt dann das Bogenmaß des Winkels $\psi = R_0 M D$ und hierdurch im Lageplan die Ordinate $\overline{ED}$, auf der der gesuchte Ort R des Planeten liegt.

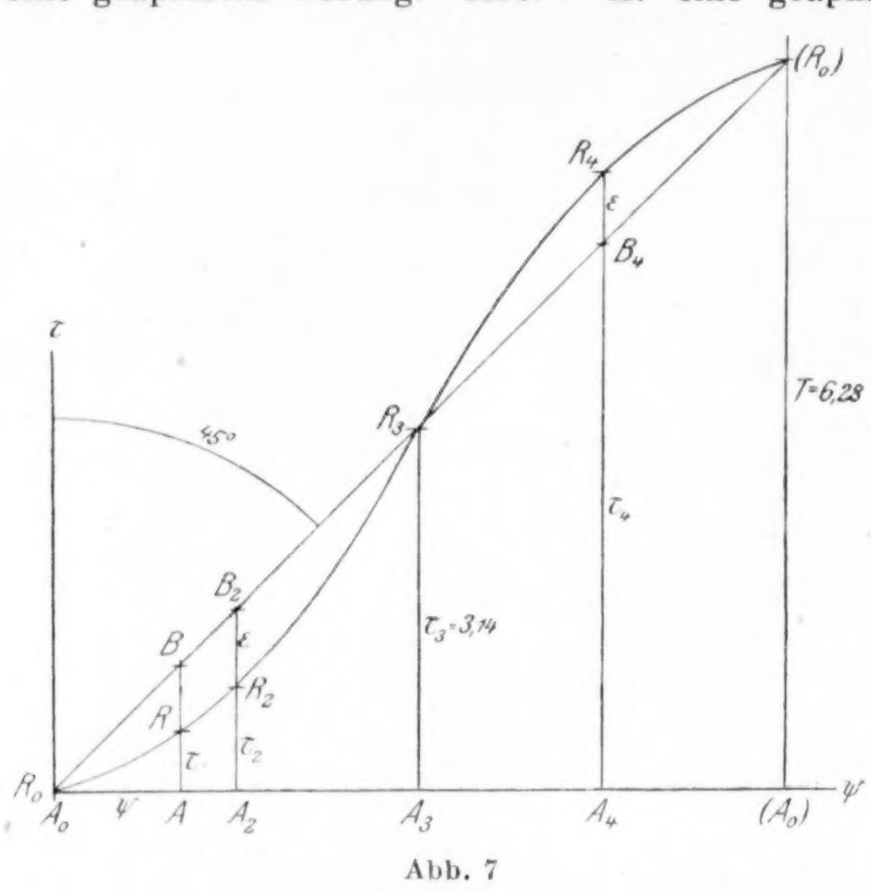


Abb. 7

Wenn die Genauigkeit der Zeichnung nicht genügt, so betrachtet man das Ergebnis ψ' der Zeichnung als Annäherungswert von ψ. Demselben entspricht der Wert

$$\tau' = \psi' - \varepsilon \sin \psi',$$

der von dem gegebenen Werte τ um eine kleine Größe $(\tau - \tau')$ abweicht. Zwischen den kleinen Größen $(\psi - \psi')$ und $(\tau - \tau')$ besteht eine Beziehung, die sich durch Differenzieren der Keplerschen Gleichung ergibt:

$$d\tau = d\psi(1 - \varepsilon \cos \psi) \quad \text{. . . . .} \quad (65).$$

Es ist also annähernd:

$$\psi - \psi' = \frac{\tau - \tau'}{1 - \varepsilon \cos \psi'} \quad \text{. . . . .} \quad (66),$$

und zwar desto genauer, je kleiner die Größen $(\psi - \psi')$ und $(\tau - \tau')$ sind. Das Verfahren kann erforderlichenfalls wiederholt werden, indem man die durch Gl. (66) bestimmte Größe von ψ als zweiten Annäherungswert betrachtet. Dieser zweite Annäherungswert hat also die Größe

$$\psi = \psi' + \frac{\tau - \tau'}{1 - \varepsilon \cos \psi'} \quad \text{. . . . .} \quad (67).$$

Die Anwendung der graphischen Darstellung zur Bestimmung des ersten Annäherungswertes ψ' ist nicht durchaus erforderlich. Denn es macht in der Regel keine Schwierigkeit, einen solchen Wert durch Schätzung zu bestimmen. Selbst bei erheblichem Schätzungsfehler führt das beschriebene Annäherungsverfahren rasch zum Ziele.

Anwendung auf das Zahlenbeispiel. Für den Zeitpunkt $t = 9 \cdot 10^6$ sec ist die wahre Anomalie φ des Planeten zu berechnen. Es möge angenommen werden, daß die gegebenen Werte $a = 3{,}39 \cdot 10^{13}$ cm, $\varepsilon = 0{,}66$ und $v_2 = 1{,}96 \cdot 10^6$ cm·sec^{-1} genau richtig sind. Dann ergibt die Gleichung

$$\tau = \frac{t v_2}{a} = 0{,}52035$$

den genauen Wert der mittleren Anomalie τ. Die ungenaue Zeichnung ergab als ersten Annäherungswert $\psi' = 1{,}16$, also $\psi = 66°28'$. Dem entspricht der ungenaue Wert $\tau' = \psi' - \varepsilon \sin \psi' = 0{,}555$, also $\tau - \tau' = 0{,}520 - 0{,}555 = -0{,}035$.

Die Gleichung (66) ergibt hierauf

$$\psi - \psi' = \frac{\tau - \tau'}{1 - \varepsilon \cos \psi'} = -0{,}0475,$$

also $$\psi = 1{,}16 - 0{,}0475 = 1{,}1125 = 63^0 45'.$$

Dem entspricht der Wert $\tau = \psi - \varepsilon \sin \psi = 0{,}5205$, der mit dem genauen Wert 0,52035 so gut übereinstimmt, daß eine Wiederholung des Verfahrens nicht nötig erscheint. Die Gleichung (60)

$$\cos \varphi = \frac{\cos \psi - \varepsilon}{1 - \varepsilon \cos \psi}$$

ergibt dann $\cos \varphi = -0{,}3074$, also die wahre Anomalie für den Zeitpunkt $t = 9 \cdot 10^6$ sec

$$\varphi = 107^0 54'.$$

8. Das Kraftgesetz. In den vorstehenden Betrachtungen ist an keiner Stelle die Kraft erwähnt, mit der Sonne und Planet aufeinander einwirken. Für die Erklärung oder Begründung der Planetenbewegung ist das Gesetz dieser Kraft also nicht erforderlich. Man kann aber den umgekehrten Weg verfolgen und aus den Keplerschen Gesetzen das Kraftgesetz ableiten. Zu dem Zweck muß der Krümmungshalbmesser der Bahnellipse bestimmt werden, was ebenfalls mit Hilfe der Keplerschen Gesetze geschehen kann. Im Lageplan, Abb. 3, bezeichnet $\overline{RR'}$ den unendlich kleinen Weg, den der Planet mit der Geschwingigkeit v in der Zeit dt zurücklegt. Die Tangenten und Normalen der Bahnpunkte R und R' bilden den unendlich kleinen Winkel $d\gamma$, und die Vektoren r, v des Bahnpunktes R schließen den Winkel $\overline{RR'D} = (r, v) = \alpha$ ein. Demnach ist

$$\varrho\, d\gamma = v\, dt \quad \text{und} \quad v\, dt \sin \alpha = r\, d\varphi.$$

Aus dem Geschwindigkeitsplan, Abb. 5, ist ferner zu ersehen, daß

$$w_1\, d\varphi \sin \alpha = v\, d\gamma$$

st, weil der Winkel $\overline{PVV'}$ gleich α ist. Endlich kommen in Betracht die Gleichungen (4) und (6):

$$v \sin \alpha = w, \quad r w = r_1 w_1.$$

Die Produkte der linken und der rechten Seiten dieser fünf Gleichungen ergeben die Größe des Krümmungshalbmessers ϱ im Bahnpunkte R:

$$\varrho = \frac{r_1}{\sin^3 \alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (68).$$

Diese Formel war Newton bekannt. Hätte Kepler sie gekannt, so wäre wahrscheinlich nicht Newton der Entdecker des Gravitationsgesetzes geworden. Denn sie ergibt in Verbindung mit der Gleichung (8)

$$\frac{P}{m} = \frac{v^2}{\varrho \sin \alpha}$$

das Kraftgesetz:

$$P = \frac{m v^2 \sin^2 \alpha}{r_1} = \frac{m w^2}{r_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (69).$$

Die Kraft P, mit der die Sonne den Planeten anzieht, ist also proportional dem Quadrat der Geschwindigkeitskomponente w. Sie ist ebenso groß, wie die Zentrifugalkraft des Planeten sein würde, wenn er mit der Geschwindigkeit w in einem Kreise sich bewegte, dessen Halbmesser gleich dem Halbparameter r_1 der Bahnellipse ist. In Verbindung mit der Gleichung (35)

$$\frac{w^2}{r_1} = \frac{\mu}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (70)$$

erhält das Kraftgesetz die bekannte Form:

$$P = \frac{\mu m}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (71),$$

über deren Ursprung folgendes zu bemerken ist. Schon vor Newton wurde von seinem Zeitgenossen Hooke die Vermutung ausgesprochen, daß das Kraftgesetz durch die Gleichung (71) dargestellt werden könne. Die Bestätigung dieser Hypothese durch die Keplerschen Gesetze gab Newton die Anregung zur Entdeckung des allgemeinen Gravitationsgesetzes

$$P = \frac{\varkappa M m}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (72),$$

welches besagt, daß je zwei Massenpunkte M und m sich gegenseitig mit Kräften anziehen, deren Größe P dem Produkte Mm direkt und dem Quadrat ihres Abstandes r umgekehrt proportional ist. Inbezug auf die Planetenbewegung stimmen die beiden Annahmen (71) und (72) überein, wenn man von der verschwindend kleinen Bewegung absieht, die der Sonne von dem Planeten erteilt wird. Denn das Produkt $\varkappa M$ aus der Gravitationskonstanten $\varkappa$ und der Sonnenmasse M kann durch die Bezeichnung μ ersetzt werden.

9. Schlußbemerkung. In den vorstehenden Betrachtungen ist von den Hauptsätzen der Mechanik nur ein einziger zur Anwendung gekommen: der Satz von der geometrischen Summierung der Bewegungsgrößen mv und der Kraftantriebe Pdt. Die Entdeckung dieses Satzes könnte seiner Einfachheit wegen als unerheblich erscheinen. Man muß aber bedenken, daß vorher die Begriffe: Masse, Kraft, Bewegungsgröße und Kraftantrieb gebildet werden mußten. Es ist das unvergängliche Verdienst Newtons, hierdurch die Grundlage der heutigen Dynamik geschaffen zu haben. Vor Newtons Zeit waren diese Begriffe kaum vorhanden oder doch sehr unklar und verschwommen. Deshalb konnte Kepler seine Gesetze und Hooke seine Hypothese nicht weiter verfolgen. Mit Hilfe der grundlegenden Begriffe ergab sich das Gesetz der ebenen Bewegung eines materiellen Punktes freilich fast von selbst. 8

Über die Spannungserhöhung durch kreisförmige Löcher in einem gezogenen Bleche.

Von **TH. PÖSCHL** in Prag.

Die Frage, in welchem Maße die Spannung in einem Zug oder Druck unterworfenen Körper durch Anbringen von Durchlochungen beeinflußt wird, ist in sehr vielen Fällen von praktischer Bedeutung. Sie läßt sich, wenigstens bei einfachen Annahmen über die Gestalt und Anordnung der Löcher, mit den Hilfsmitteln der Elastizitätstheorie streng erledigen. In einer demnächst erscheinenden Mitteilung [1]) habe ich den Einfluß eines elliptischen Loches in einer in irgend einer Richtung oder allseits gleichförmig gespannten Scheibe untersucht. Wie bei allen derartigen Problemen kam es vor allem naturgemäß darauf an, angemessene Koordinaten zu verwenden, als welche sich die elliptischen Koordinaten von selbst darboten. Die zweiten kovarianten Ableitungen der zugehörigen Airyschen Funktion stellen dann die Spannungen an jeder Stelle des Bleches dar.

Hat man die Spannungsverteilung zu ermitteln, die durch zwei kreisförmige Löcher in einem gespannten Bleche [2]) hervorgerufen wird, so wird man als Koordinatensystem das Doppelsystem der Kreise zweier Büschel verwenden, das zu zwei reellen und zu zwei imaginären Grundpunkten gehört (bizirkulare oder bipolare Koordinaten). Auch dieses System ist isometrisch (d. h. die Kurvenvierecke sind quadratisch), und dieser Umstand bringt, wie auch im eben erwähnten elliptischen Problem, eine wesentliche Vereinfachung in der Rechnung mit sich, wenn es auch — da es sich doch um die Gleichung $\Delta\Delta\psi = 0$ handelt — unmöglich ist, das Hilfsmittel der konformen Abbildung unmittelbar zu verwerten.

In der vorliegenden Note gebe ich die Entwicklung zunächst für den Fall, daß die in zwei Kreisen durchlochte Scheibe in radialer Richtung allseits gleichmäßig gespannt ist; es zeigt sich, wie nicht anders zu erwarten, daß der größte Wert der Tangentialspannung an den inneren, zueinander nächstliegenden Punkten der beiden Kreise auftritt, und daß dieser größte Wert um so größer ist, je größer die Durchmesser der beiden Kreise sind und je näher die beiden Kreise einander liegen. Im folgenden sind die hierfür geltenden Formeln auch zahlenmäßig ausgewertet. Die erhaltenen Ergebnisse liefern einen Beitrag für die Beurteilung der Größe der Spannungserhöhung, die durch mehrere Löcher entstehen, z. B. durch Nietlöcher in einem Bleche, wenn auch hierbei

[1]) Math. Zeitschr. 11, 1921, S. 1 bis 7.

[2]) Es handelt sich stets um das ebene Problem, das bekanntlich in folgenden beiden Fällen vorliegt: a) beim unendlich langen Zylinder, der gleichmäßig seiner ganzen Länge nach beansprucht wird, b) bei der unendlich dünnen Scheibe.

teilweise andere Verhältnisse herrschen. Ein weiteres, sich an die vorliegende Note anschließendes Problem wäre die Untersuchung der Spannungsverhältnisse für die unendliche Kreisreihe (Kreisgitter) u. dergl. m.

Die Ermittlung der Spannungsverteilung für den Fall, daß das Blech nur nach einer Richtung gespannt ist, habe ich bisher nicht vollständig erledigen können, da die Erfüllung der Bedingungen im Unendlichen hierbei Schwierigkeiten bereitet.

1. Grundgleichungen. Von Cartesischen Koordinaten x, y in der Ebene ausgehend, werde ein System von orthogonalen krummlinigen Koordinaten ξ, η eingeführt mittels der Funktion

$$\xi + i\eta = {}^1/_2 \log \frac{ic - z}{ic + z}$$

oder

$$z = x + iy = c . \operatorname{tg} {}^1/_2(\xi + i\eta) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1);$$

daraus folgt zunächst

$$\operatorname{tg} \xi = \operatorname{tg} {}^1/_2(\xi + i\eta + \xi - i\eta) = \frac{2cx}{c^2 - x^2 - y^2},$$

also

$$x^2 + y^2 + 2cx \operatorname{ctg} \xi - c^2 = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

und ebenso

$$x^2 + y^2 - 2cy \,\mathfrak{Ctg}\, \eta + c^2 = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3).$$

Außerdem folgt aus Gl. (1)

$$x + iy = \frac{\sin {}^1/_2(\xi + i\eta) \cos {}^1/_2(\xi - i\eta)}{\cos {}^1/_2(\xi + i\eta) \cos {}^1/_2(\xi - i\eta)} = c \frac{\sin \xi + i \,\mathfrak{Sin}\, \eta}{\mathfrak{Cof}\, \eta + \cos \xi},$$

also

$$\left.\begin{aligned} x &= c \frac{\sin \xi}{\mathfrak{Cof}\, \eta + \cos \xi} \\ y &= c \frac{\mathfrak{Sin}\, \eta}{\mathfrak{Cof}\, \eta + \cos \xi} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4).$$

Die Gleichung (2) stellt eine Schar von Kreisen dar, deren Mittelpunkte C auf der x-Achse in einer Entfernung $-c \operatorname{ctg} \xi$ von 0 liegen, Abb. 1, und deren Halbmesser gleich $c \operatorname{cosec} \xi$ sind. Diese Kreise bilden ein Kreisbüschel, dessen Grundpunkte A und B auf der y-Achse in den Abständen $\pm c$ von 0 liegen.

Dabei ist $\measuredangle \xi = \measuredangle OCA$; daher stellt $\xi = 0$ den Teil AB der y-Achse dar; wenn $0 < \xi < \pi$, so besteht die Kurve $\xi =$ konst. aus dem Stück eines Kreisbogens zwischen A und B, das auf der positiven Seite der x Achse liegt; für $\xi = \pi$ wird die Kurve die ganze y-Achse außerhalb des Teiles AB. Wenn $-\pi < \xi < 0$, so erhält man jene Kreisbogenstücke, die auf der negativen Seite der x-Achse liegen.

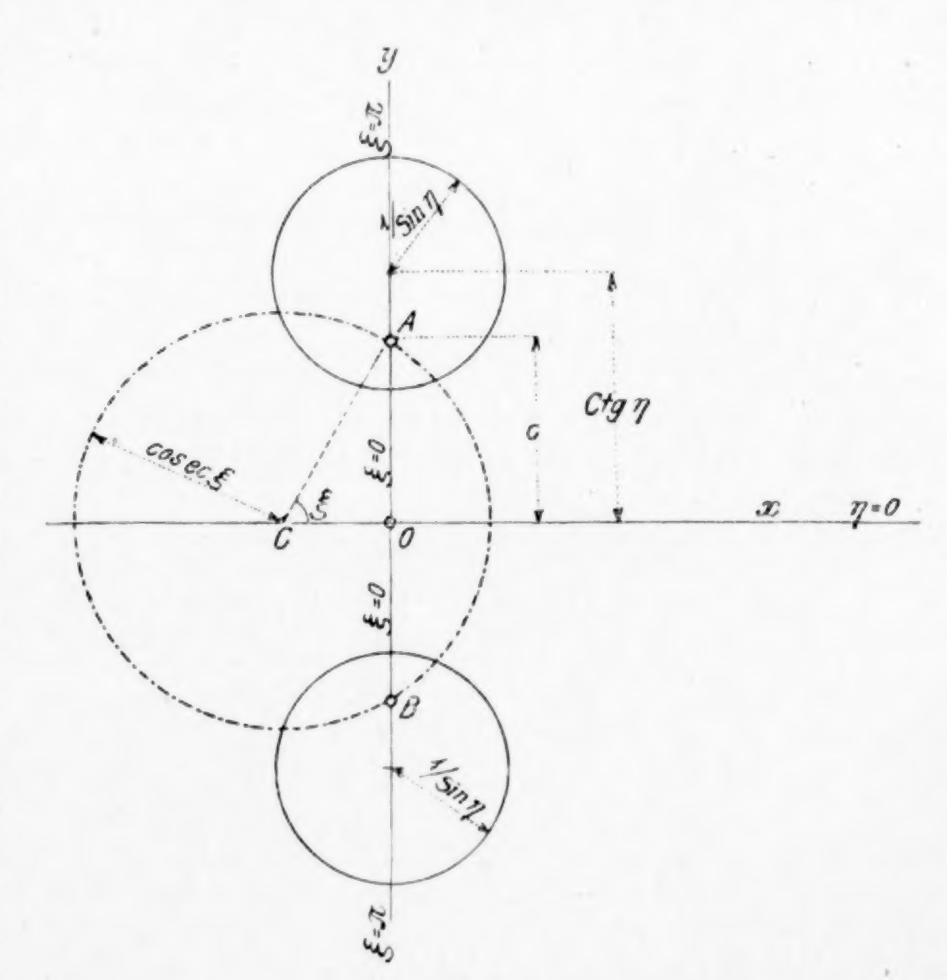


Abb. 1

Die Gleichung (3) stellt dagegen das System der Orthogonalkreise zu diesen Kreisen dar; es besteht aus zwei getrennten Scharen, deren Mittelpunkte auf der y-Achse in Entfernungen $\pm c \,\mathfrak{Ctg}\, \eta$ von 0 liegen, und deren Halbmesser gleich $c \,\mathfrak{Cofec}\, \eta$ sind. Diese Kreise schneiden die x-Achse nicht. Wenn $\eta = \infty$ ist, so erhält man den Punkt A; für $\infty < \eta < 0$ stellt $\eta = \eta_0 =$ konst. einen Kreis dar, der A umgibt; für $\eta = 0$ erhält man die x-Achse. Für $-\infty < \eta < 0$ liefert $\eta =$ konst. einen Kreis, der B umgibt, welcher Punkt selbst dem Werte $\eta = -\infty$ entspricht.

Das Unendliche wird daher durch $\xi = \pi$, $\eta = 0$ dargestellt.

Drücken wir das Bogenelement durch diese Koordinaten ξ und η aus, so folgt

$$ds^2 = \frac{d\xi^2 + d\eta^2}{c^2(\mathfrak{Cof}\,\eta + \cos\xi)^2} = \frac{d\xi^2 + d\eta^2}{\lambda}, \quad \lambda = c^2(\mathfrak{Cof}\,\eta + \cos\xi)^2 \quad . \quad . \quad . \quad (5),$$

und wenn wir für die Laplaceschen Differentialausdrücke die Bezeichnungen $\Delta\psi = \psi_{xx} + \psi_{\varphi\varphi}$ bzw. $\Delta^*\psi = \psi_{\xi\xi} + \psi_{\eta\eta}$ verwenden, so ist

$$\Delta\psi = \lambda\Delta^*\psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Wir betrachten nun ein unendlich langes Blech, das mit zwei kreisförmigen Löchern versehen ist, die durch $\eta = \pm\eta_0 =$ konst. gekennzeichnet sind, wobei $0 < |\eta_0| < \infty$, und an deren Rändern keine äußeren Kräfte angreifen mögen.

Nach dem bekannten Vorgange[1]) hat man zur Lösung derartiger Aufgaben eine über die Ebene ausgebreitete Funktion, die Airysche Spannungsfunktion auf Grund folgender Forderungen zu bestimmen:

I. Im ganzen Bereiche außerhalb der gegebenen Begrenzungen genügt ψ der »biharmonischen Differentialgleichung«

$$\Delta\Delta\psi = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7),$$

die in den für das Doppelkreissystem geltenden Koordinaten ξ und η so lautet:

$$(\mathfrak{Cof}\,\eta + \cos\xi)\Delta^*\Delta^*\psi - 4\left(\sin\xi\frac{\partial\Delta^*\psi}{\partial\xi} - \mathfrak{Sin}\,\eta\frac{\partial\Delta^*\psi}{\partial\eta}\right) + 4(\mathfrak{Cof}\,\eta - \cos\xi)\Delta^*\psi = 0 \quad . \quad (7').$$

II. Längs des Umfanges der beiden Kreise $\pm\eta_0 =$ konst. schließt sich die Funktion ψ stetig und mit stetiger Tangente an die über den Kreisen aufgebaute äußere Belastungsfläche[2]) an.

Wenn im Innern dieser Kreise keine Kräfte wirken, so besteht diese äußere Belastungsfläche aus zwei über den Kreisen liegenden Ebenenstücken, die aus Symmetriegründen nur längs der y-Achse, und zwar symmetrisch zur x-Achse (dachförmig) geneigt sind. Die Neigung dieser Ebenen ist nicht von vornherein gegeben, sondern wird vielmehr durch das Problem selbst bestimmt.

III. Im Unendlichen muß ψ den Bedingungen für gleichförmigen Zug nach irgend einer Richtung bezw. gleichförmigen radialen Zug genügen[3]), muß also von der Form sein:

a) $\psi \to \frac{p}{2} r^2$ bei gleichförmigem, radialem Zug,

b) $\psi \to \frac{p}{2} x^2$ » » Zug in der Richtung y,

c) $\psi \to \frac{p}{2} y^2$ » » » » » » x,

d) $\psi \to \frac{p}{2} (x \cos\alpha + y \sin\alpha)^2$ bei gleichförmigem Zug in einer unter dem Winkel α gegen die y-Achse geneigten Richtung.

Trägt man $\psi = \psi(\xi, \eta)$ an jeder Stelle der Ebene als Ordinate auf, so erhält man die Spannungsfläche oder innere Belastungsfläche, für welche die Bedingungen II und III unmittelbar einleuchtende geometrische Bedeutung haben.

In der vorliegenden Note beschäftigen wir uns vorerst mit dem Fall IIIa.

2. Spannungsfunktion für gleichförmigen radialen Zug. Aus Symmetriegründen muß die gesuchte Funktion sowohl in ξ wie auch in η gerade sein. Die Bedingungen II. und IIIa. für die Funktion ψ können wir nunmehr so aussprechen:

I. In der ganzen Ebene außerhalb der beiden Kreise ist $\Delta\Delta\psi = 0$.

II. An den Rändern der Kreise ist

$$\left.\begin{array}{l} \text{für } \eta = \eta_0, \ \psi = Cy \\ \text{» } \eta = -\eta_0, \ \psi = -Cy \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

[1]) s. F. Klein und K. Wieghardt, Ueber Spannungsflächen und reziproke Diagramme, Archiv Math. Phys. (3 Reihe) 8, 1904, S. 1 und 95.

[2]) s. P. Funk, Die linearen Differenzengleichungen und ihre Anwendung in der Theorie der Baukonstruktionen, Berlin 1920.

[3]) Die Bedingungen lauten genauer so, daß die zweiten Ableitungen von ψ sich in Unendlichen wie die der rechtsstehenden Ausdrücke von a) bis d) verhalten, praktisch kommt dies auf die im Text gegebene Fassung hinaus.

und

$$\left.\begin{aligned} &\text{für } \eta = \eta_0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = C\frac{\partial y}{\partial \eta} \\ &\;\text{»}\;\; \eta = -\eta_0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = -C\frac{\partial y}{\partial \eta} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9).$$

C gibt die Neigung der Ebenen und wird durch das Problem selbst bestimmt; y ist durch Gl. (4) gegeben.

IIIa. Für $\xi = \pi$, $\eta = 0$ ist

$$\psi \to \frac{p}{2} r^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10).$$

Was die Auswahl der Potentiale und Bipotentiale, aus denen sich die gesuchte Lösung zusammensetzt, anlangt, so wird man es zunächst mit den einfachsten versuchen. Wegen der Gleichung (10) wird man vor allem r^2 selbst heranziehen, wobei

$$r^2 = c^2 \frac{\mathfrak{Cof}\,\eta - \cos \xi}{\mathfrak{Cof}\,\eta + \cos \xi}$$

oder auch

$$\frac{1 + r^2}{2} = c^2 \frac{\mathfrak{Cof}\,\eta}{\mathfrak{Cof}\,\eta + \cos \xi}, \quad \frac{1 - r^2}{2} = c^2 \frac{\cos \xi}{\mathfrak{Cof}\,\eta + \cos \xi}.$$

Alle noch hinzutretenden Anteile müssen im Unendlichen von niedrigerer Ordnung unendlich werden, und zwar müssen sie, da sie gerade Funktionen sind, regulär sein. Der Umstand führt sofort auf

$$\eta y = \frac{\eta\, \mathfrak{Sin}\,\eta}{\mathfrak{Cof}\,\eta + \cos \xi}.$$

In der Tat ist die gesuchte Lösung von der Form

$$\psi = A \frac{\mathfrak{Cof}\,\eta}{\mathfrak{Cof}\,\eta + \cos \xi} + B \frac{\eta\, \mathfrak{Sin}\,\eta}{\mathfrak{Cof}\,\eta + \cos \xi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11),$$

wenn wir mit A und B Konstante bezeichnen. Gl. (8) gibt sogleich

$$A\, \mathfrak{Cof}\,\eta_0 + B\eta_0\, \mathfrak{Sin}\,\eta_0 = C\, \mathfrak{Sin}\,\eta_0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

und Gl. (9) gibt nach Ausführung der Differentiation nach η in den Ausdrücken (11) und (9)

$$\left.\begin{aligned} A\, \mathfrak{Sin}\,\eta_0 + B(\eta_0\, \mathfrak{Cof}\,\eta_0 + \mathfrak{Sin}\,\eta_0) &= C\, \mathfrak{Cof}\,\eta_0 \\ B(\eta_0 + \mathfrak{Cof}\,\eta_0\, \mathfrak{Sin}\,\eta_0) &= C \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (13).$$

Die Gleichungen (12) und (13) sind miteinander verträglich; ihre Determinante verschwindet identisch. Es ergibt sich daraus

$$B = \frac{A}{\mathfrak{Sin}^2\,\eta_0}, \quad C = A \frac{\eta_0 + \mathfrak{Cof}\,\eta_0\, \mathfrak{Sin}\,\eta_0}{\mathfrak{Sin}\,\eta_0}.$$

Wenn wir endlich die Spannung pro Längeneinheit im Unendlichen mit p bezeichnen, so folgt aus

$$\psi \to \frac{p}{2} r^2 = \frac{p}{2} c^2 \frac{2}{\mathfrak{Cof}\,\eta + \cos \xi} = A \frac{1}{\mathfrak{Cof}\,\eta + \cos \xi}$$

für A die Aussage

$$A = p c^2.$$

Wir erhalten daher die gesuchte Spannungsfunktion in der einfachen Gestalt

$$\psi = p c^2 \frac{\mathfrak{Cof}\,\eta + \dfrac{1}{\mathfrak{Sin}^2\,\eta_0}\, \eta\, \mathfrak{Sin}\,\eta}{\mathfrak{Cof}\,\eta + \cos \xi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14).$$

3. Die Spannungskomponenten. Wie ich in der eingangs erwähnten Arbeit auseinandergesetzt habe und wie durch sinngemäße Auffassung des Begriffes Differentialquotient einleuchtet, sind die Spannungskomponenten in den Koordinaten ξ, η, für die wir in der Loveschen Bezeichnung $\widehat{\xi\xi}$, $\widehat{\eta\eta}$ und $\widehat{\xi\eta}$ schreiben, durch die Produkte der bzgl. zweiten kovarianten Ableitungen von ψ nach den Koordinaten mit λ dargestellt. Die Spannung, die uns insbesondere interessiert, ist die Tangentialspannung $\widehat{\xi\xi}$, für die sich folgender Ausdruck ergibt:

$$\widehat{\xi\xi} = \lambda \psi_{\eta\eta} - {}^1\!/_2 \lambda_\xi \psi_\xi + {}^1\!/_2 \lambda_\eta \psi_\eta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

und für λ seinen Wert eingesetzt

$$\widehat{\xi\xi} = \frac{p}{\mathfrak{Sin}^2\,\eta_0} \frac{2\, \mathfrak{Cof}\,\eta \cos^2 \xi + (3\, \mathfrak{Cof}^2\,\eta + \mathfrak{Cof}^2\,\eta_0) \cos \xi + \mathfrak{Cof}\,\eta\, (\mathfrak{Cof}^2\,\eta + \mathfrak{Cof}^2\,\eta_0)}{\mathfrak{Cof}\,\eta + \cos \xi} \quad . \quad (16).$$

Für den Rand der Kreise $\eta = \pm \eta_0$ erhält man den einfachen Ausdruck

$$[\widehat{\xi\xi}]_{\eta=\pm\eta_0} = p \frac{2 \operatorname{Cof} \eta_0}{\operatorname{Sin}^2 \eta_0} (\operatorname{Cof} \eta_0 + \cos \xi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17),$$

während die beiden anderen Spannungskomponenten $\widehat{\eta\eta}$ und $\widehat{\xi\eta}$, die durch analoge Gleichung wie (15) gegeben sind, für $\eta = \pm \eta_0$ identisch 0 ergeben.

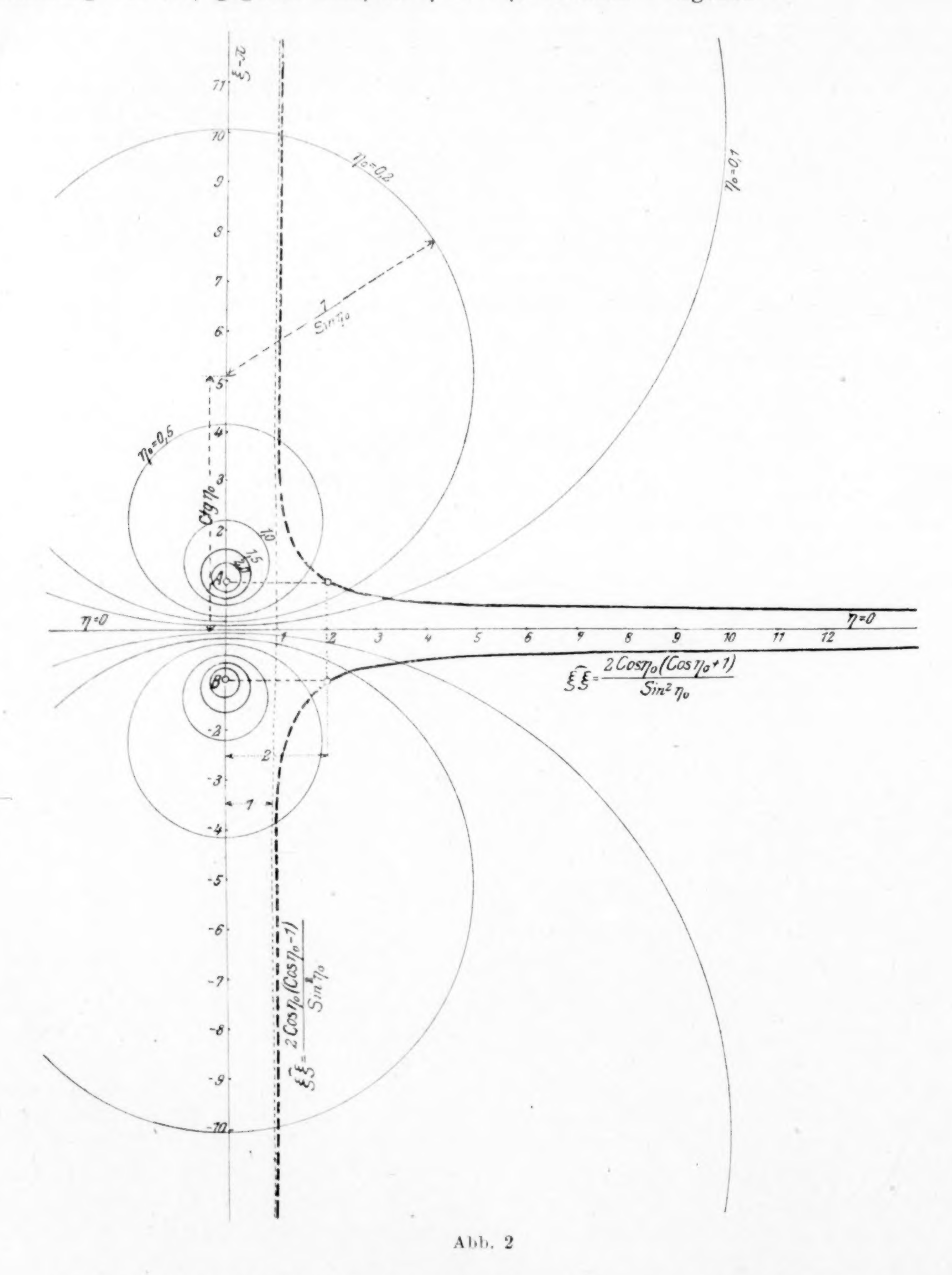


Abb. 2

In Abb. 2 ist zunächst die Tangentialspannung $\widehat{\xi\xi}$ an jenen Durchmesserendpunkten, in welchen die Verbindungsgerade der Mittelpunkte der Kreise (d. i. die y-Achse) diese schneidet, für alle Kreise des durch den Wert $c = 1$ gekennzeichneten Büschels dargestellt; dabei ist auch $p = 1$ gesetzt. Die dafür geltenden Formeln sind nach Gl. (17)

$$\text{innerer Durchmesserendpunkt } (\xi = 0): \; \widehat{\xi\xi} = \frac{2\,\mathfrak{Cof}\,\eta_0\,(\mathfrak{Cof}\,\eta_0 + 1)}{\mathfrak{Sin}^2\,\eta_0},$$

$$\text{äußerer } \quad » \quad (\xi = \pi): \; \widehat{\xi\xi} = \frac{2\,\mathfrak{Cof}\,\eta_0\,(\mathfrak{Cof}\,\eta_0 - 1)}{\mathfrak{Sin}^2\,\eta_0}.$$

Für andere p sind diese Werte mit p zu multiplizieren. Die Spannungen an den inneren Durchmesserendpunkten stellen sich weit höher heraus wie außen, und zwar um so höher, je größer die Kreise werden, je näher sie also der x-Achse kommen, d. h. je schmäler der zwischen den Kreisen bleibende Querschnitt wird. Wenn die Kreise auf das Paar der Grundpunkte A und B einschrumpfen ($\eta_0 = \pm\infty$), so nähert sich $\widehat{\xi\xi}$ dem Werte 2, und dies ist jener Wert, den die Spannung auch für ein einzelnes Kreisloch

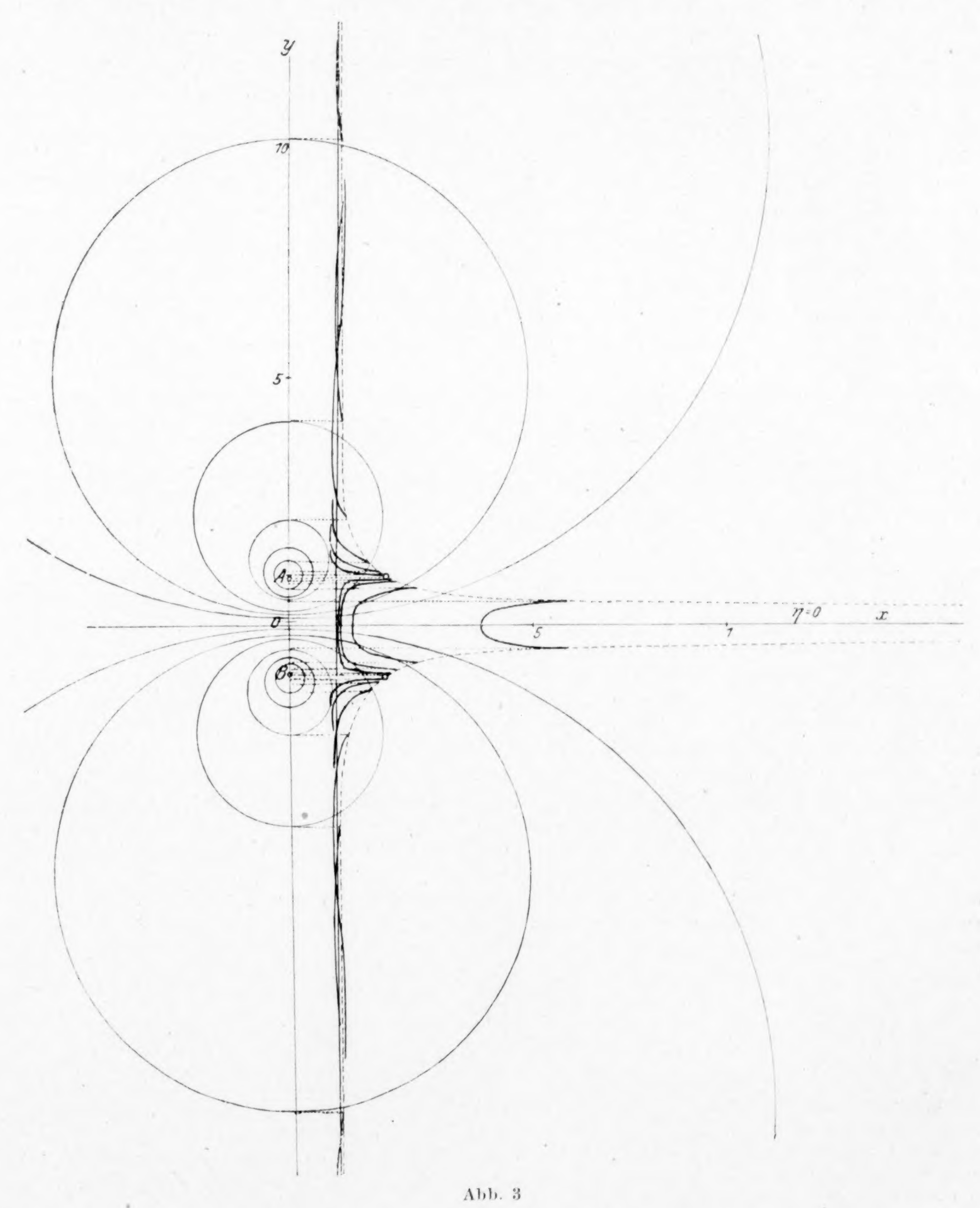


Abb. 3

(von beliebiger Größe) in einem allseits gleichmäßig gespannten Bleche annimmt[1]). Für zwei Löcher (und wahrscheinlich auch für beliebig viele, die sich nicht häufen) tritt dieser Wert nur für den Fall auf, wo es sich um unendlich kleine Löcher, also um Punktierungen handelt.

Ferner ist in Abb. 3 für eine Anzahl von Kreispaaren der Verlauf der Spannung $\widehat{\xi\xi}$ längs der außerhalb der Kreise verlaufenden Stücke der Verbindungslinie der Mittelpunkte aufgetragen. Die so erhaltenen Kurven erscheinen zwischen den zwei Aesten der in Abb. 2 dargestellten Kurve eingehängt, die hier punktiert eingetragen ist.

Leon und Zidlicky[2]) haben für die nach einer Richtung gespannte doppelt durchlochte Scheibe (Kautschukplatte) Versuche angestellt und auch die Spannungsverteilung zwischen den Löchern dargestellt; die hier erhaltenen Ergebnisse stimmen damit qualitativ gut überein. Zahlenmäßig läßt sich ein Vergleich wegen der verschiedenen Belastungen nicht durchführen.

Die numerischen Werte von $\widehat{\xi\xi}$ sind aus folgender Zahlentafel zu ersehen.

	a) Innerhalb der Löcher ($\xi = 0$)							b) außerhalb der Löcher ($\xi = \pi$)						
$\eta_0 =$	0,1	0,2	0,5	1,0	2,0	3,0	4,0	0,1	0,2	0,5	1,0	2,0	3,0	4,0
$\eta = 0,1$	402,5	102,0	15,9	3,91	1,31	1,04	~1,0	1,01	1,00	1,06	1,00	1,00	1,00	1,005
$= 0,2$		104,0	16,3	3 95	1,31	1,04			1,02	0,96	0,99	1,06	1,08	1,03
$= 0,5$			17,7	4,28	1,34	1 05				1,05	1,02	1,06	1,01	0,85
$= 1,0$				5,64	1,68	1,06					1,19	1,05	1,00	0,84
$= 2,0$					2,72	1,23						1,58	1,03	0,83
$= 3,0$						2,22	~1,0						1,82	0,99
$= 4,0$							~2,0							1,87

26

Anwendung der elementaren Turbinentheorie auf die Berechnung der Windräder.

Von **C. PFLEIDERER** in Braunschweig.

Angesichts der heutigen Notlage unseres Wirtschaftslebens wird der Ausnutzung der in den bewegten Luftmassen enthaltenen Energiemengen besonderes Interesse zugewandt. Tatsächlich handelt es sich hier auch um sehr bedeutende Kraftquellen, denen gegenüber unsere Wasserkräfte an Umfang stark in den Hintergrund treten.

Die Berechnung des Windrades geschieht heute allgemein in der Weise, daß man von den Erfahrungswerten über den Winddruck auf gerade oder gewölbte Flächen ausgeht, die schräg zum Wind gestellt sind[3]). Bei dieser Berechnungsweise tritt der Einfluß von Form und Krümmung der Schaufel nicht unmittelbar in die Erscheinung. Es kommt hierbei nicht zum Ausdruck, daß die Arbeitsleistung des Windrades ausschließlich auf der Ablenkung des Windes durch die Schaufelflächen beruht, also die Verhältnisse sehr ähnliche sind wie bei den Turbinen. Einige der in neuester Zeit erschienenen Arbeiten[4]) benützen die für die Erkenntnis der Wirkung der Luftschraube geschaffene Theorie der idealen Strahlbewegung; diese Theorie nimmt die Schaufelfläche als Schraubenfläche an und gibt keinen Aufschluß über die Krümmung der Schaufelprofile, die nach der Erfahrung einen zu beachtenden Einfluß besitzt. Die Behandlung des Windrades als Umkehrung des Propellers ist nun zweifellos für die Erlangung eines allgemeinen Einblicks zweckmäßig und wertvoll. Sie ist aber nur in beschränktem Maße zulässig, wie bei-

[1]) S. z. B. A. u. L. Föppl, Drang und Zwang, 1. Bd., München 1920, S. 306.

[2]) Leon und Zidlicky, Die Ausnützung des Materials in gelochten Körpern. Zeitschr. Ver. deutsch Ing. 915, S. 11.

[3]) Otto Stertz, Moderne Windturbinen, Leipzig 1912. Vergl. auch Paul La Cour, Die Windkraftmaschinen und ihre Anwendung, deutsch von Dr. Joh. Kaufmann, Leipzig 1905.

[4]) M. Munk, Ueber vom Winde getriebene Luftschrauben, Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt 1920, S. 220, ferner Wilh. Hoff. Theorie der idealen Windkraftmaschinen, ebenda, S. 223, endlich A Betz, Das Maximum der theoretisch möglichen Ausnutzung des Windes durch Windmotore, Zeitschrift für das gesamte Turbinenwesen 1920, S. 307.

spielsweise die Behandlung der Dampfturbine als Umkehrung des Turbokompressors. Die heutigen Windräder mit gutem Wirkungsgrad unterscheiden sich baulich auch sehr stark vom Propeller. Ihre Schauflung entspricht durchaus derjenigen einer Turbine. Das Windrad ist allerdings bereits von Baudisch[1]) als Turbine bearbeitet worden. Seine Ableitungen stehen aber insofern im Widerspruch mit den heutigen Anschauungen, als er der Zähigkeit der Luft einen ausschlaggebenden Einfluß auf den Verlauf der Stromlinien einräumt. Auch beschränkt er sich auf die Behandlung des einfachsten, heute nicht mehr zur Anwendung gelangenden Falles, daß die Schaufelfläche am inneren und äußeren Umfange gleiche Krümmung und Neigung besitzt. Die Schaufeln mit einer nach der Radachse hin zunehmenden Neigung der Fläche sowohl an der Eintritts- wie an der Austrittskante geben aber einen wesentlich besseren Wirkungsgrad als die zylindrisch ausgebildeten Schaufeln[2]).

Die vorliegende Arbeit will die Betrachtungsweise der elementaren Turbinentheorie (Stromfadentheorie), die, von G. Zeuner begründet, heute in allen Lehrbüchern des Turbinenbaues wiedergegeben wird, auf die Verhältnisse der Windräder übertragen. Sie stellt sich vor allem die Aufgabe, die Schaufelform so zu bestimmen, daß aus einer gegebenen Radfläche ein Höchstwert an Maschinenleistung gewonnen wird. Unsere Ueberlegung führt zu bestimmten zahlenmäßigen Angaben für die Wahl der Winkel, unter denen die Windradschaufel längs der Austrittskante geneigt sein muß. Dabei ergibt sich auf dem Wege der Rechnung die Form der Schaufel, die bisher auf dem Wege des Versuchs als besonders günstig erkannt wurde. Da es sich im Windrad um verhältnismäßig kleine Druckänderungen handelt, so ist die Luft als tropfbare Flüssigkeit behandelt.

1. Das Strömungsbild. Beim Durchströmen des Windes durch das Rad tritt eine allmähliche Verringerung der axialen Komponente der Geschwindigkeit ein, teils infolge der stattfindenden Arbeitsabgabe, teils weil der Wind nicht mehr in rein axialer Richtung weiterströmt. Der Wind beansprucht also nach dem Austritt zu einen immer größer werdenden axialen Strömungsquerschnitt. Die Folge davon wird sein, daß ein Teil des Windes vorzeitig aus dem Rad herausgedrängt und ganz oder teilweise an der Arbeitsleistung verhindert wird. Die Abdrängung des Windes nach außen erzeugt auch schon vor dem Rade einen gewissen Ueberdruck, der von außen nach innen zunehmen muß. Mit dieser Druckzunahme muß nach den Gesetzen der Hydraulik auch eine entsprechende Geschwindigkeitsabnahme Hand in Hand gehen, so daß die Stromfäden schon vor dem Rad auseinander gehen müssen.

Auf der Austrittseite des Rades liegen die Verhältnisse umgekehrt. Da beim Verlassen der Kanäle die Arbeitsabgabe und Ablenkung aufhört, so haben die Stromfäden das Bestreben, sich wieder parallel zur Achse zu richten. Diese Abdrängung nach innen beansprucht aber eine gewisse Wegstrecke und wird deshalb nach dem Verlassen des Rades noch nicht gleich beendet sein können. Sie bringt ferner eine Druckabnahme vom Radumfang nach innen mit sich. Während also auf der Eintrittseite der Druck größer ist als in der Umgebung des Rades, ist er auf der Austrittseite kleiner. Und zwar wird der Druckunterschied vor und hinter dem Rad nach der Radachse hin zunehmen. Wir erhalten also den in Abb 1 durch die ausgezogenen Linien dargestellten Verlauf der Stromfäden.

Bis jetzt ist auf die das Rad umgebende Luftströmung noch keine Rücksicht genommen. Diese erfolgt auch hinter dem Rad mit der unverringerten Eintrittsgeschwindigkeit der Arbeitsluft. Längs der Grenzschicht zwischen beiden Strömungen wird eine Vermischung eintreten. Da die Masse der umgebenden Luft unendlich groß ist gegenüber der Arbeitsluft, so wird dieser Vermischungsvorgang in einiger Entfernung hinter dem Rad damit enden, daß die

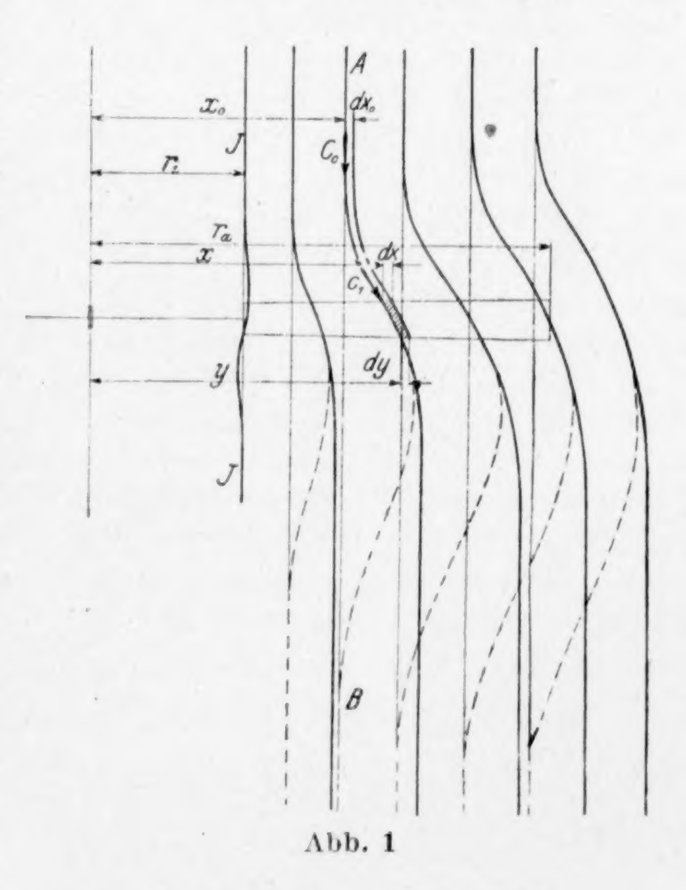


Abb. 1

[1]) Zeitschrift für das gesamte Turbinenwesen 1917 S. 153 u. 169, 1920 S 125 u. 136.
[2]) Stertz, a. a. O. S. 38 bis 40.

Arbeitsluft wieder ihre ursprüngliche Geschwindigkeit erhält. Die Stromlinien der Abb. 1 werden also die gestrichelt gezeichnete Fortsetzung erfahren.

2. Der scheinbare Wirkungsgrad. Von der Berücksichtigung der Verluste, die durch Reibung und Wirbelung entstehen, nehmen wir vorläufig Abstand. Wir denken uns das Rad in unendlich viele konzentrische Teilräder zerlegt, deren seitliche Begrenzung durch die Stromlinien erfolgt, und betrachten zunächst die Vorgänge, die sich in der in Abb. 1 durch Schraffur hervorgehobenen Teilturbine abspielen. Es bezeichne mit Bezug auf Abb. 2 und Abb. 3, welche die Abwicklung der Schaufelschnitte am Ein- und Austritt darstellen:

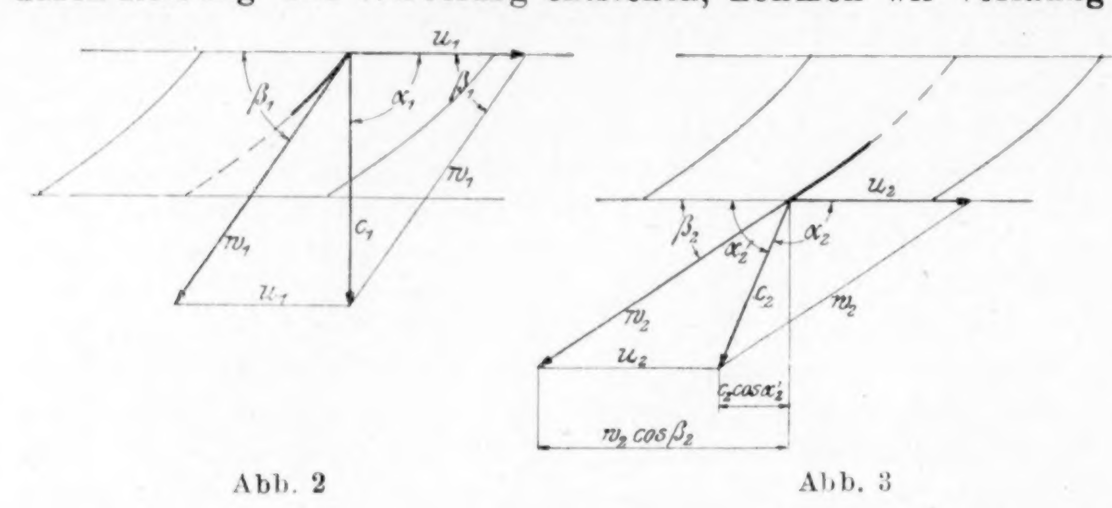


Abb. 2 Abb. 3

c_0 die Geschwindigkeit des herankommenden Windes,

c_1, c_2 die absolute Windgeschwindigkeit am Ein- und Austritt des Schaufelkanals,

w_1, w_2 die Windgeschwindigkeiten relativ zum Rad am Ein- und Austritt,

ω die Winkelgeschwindigkeit des Rades,

$u_1 = x\omega$ die Umfangsgeschwindigkeit des Rades am Halbmesser x,

$u_2 = y\omega$ die Umfangsgeschwindigkeit des Rades am Halbmesser y,

$\Delta h_1 = \varepsilon_1 \frac{c_0^2}{2g}$ den Ueberdruck in Meter Luftsäule vor dem Rad,

$\Delta h_2 = \varepsilon_2 \frac{c_0^2}{2g}$ den Unterdruck in Meter Luftsäule hinter dem Rad.

Die Eintrittsgeschwindigkeit c_1 ist wegen der besprochenen Stauung der Luft kleiner als c_0. Zwischen beiden besteht die Beziehung

$$c_1^2 = c_0^2 - 2g\Delta h_1 = c_0^2(1-\varepsilon_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Für ein Rad von sehr geringer axialer Erstreckung ist der axiale Reinquerschnitt und somit auch die axiale Geschwindigkeit am Ein- und Austritt gleich, also

$$c_1 = w_2 \sin \beta_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Diese Gleichung würde genau zutreffen, wenn das Rad mit sehr vielen kleinen Schaufeln nach Art der Dampfturbinenschaufeln ausgeführt würde. Für die heute üblichen Radformen liefert sie einen etwas zu kleinen Wert für die Eintrittsgeschwindigkeit.

Zur Vermeidung von Verlusten wird üblicherweise verlangt, daß der Eintritt in das Rad »stoßfrei« erfolgt. Dies ist, falls wir von der Neigung der Stromlinien gegen die Achse absehen, der Fall, wenn die Schaufelneigung β_1 am Eintritt, Abb. 2, bestimmt wird aus

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{c_1}{u_1} = \frac{c_1}{x\omega} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Die Schaufelfläche ist also am Eintritt als Schraubenfläche zu formen. Wird in Gl. (3) c_1 aus Gl (2) ermittelt, so wird die Schaufelneigung zwar etwas zu klein, die Krümmung also zu gering, aber gleichzeitig auch der Neigung der Stromlinien gegen die Achse einigermaßen Rechnung getragen und die Gefahr des Rückenstoßes mit Sicherheit vermieden.

Zwischen den Geschwindigkeiten am Eintritt und Austritt besteht die aus der Turbinentheorie bekannte Beziehung (Energiegleichung der Relativbewegung unter Einführung des Fliehkraft-Potentials):

$$w_2^2 = w_1^2 + u_2^2 - u_1^2 + (\Delta h_1 + \Delta h_2) 2g.$$

Da nun nach Abb. 2

$$w_1^2 = c_1^2 + u_1^2 = c_0^2(1-\varepsilon_1) + u_1^2, \quad w_2^2 = c_0^2 + u_2^2 + \varepsilon_2 c_0^2,$$

so erhält man die Relativgeschwindigkeit beim Austritt:

$$w_2 = \sqrt{u_2^2 + c_0^2(1+\varepsilon_2)} = c_0 \sqrt{\left(\frac{u_2}{c_0}\right)^2 + 1 + \varepsilon_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Für die Rechnung ist also nicht mehr die Kenntnis des Ueberdrucks vor dem Rad, sondern nur noch des Unterdrucks hinter dem Rad notwendig, der durch Versuche bestimmt werden kann (vergl. auch Ziffer 5).

Die Turbinentheorie liefert ferner für das in Arbeit verwandelte Gefälle H_i in Meter Luftsäule, die für ein kg Luft an das Rad abgegebene Arbeit, die »Eulersche Gleichung« (Gleichung für das Moment der Bewegungsgröße um die Drehachse):

$$H_i = \frac{1}{g}(c_1 u_1 \cos \alpha_1 - c_2 u_2 \cos \alpha_2),$$

wo im vorliegenden Fall $\alpha_1 = 90^0$, $\alpha_2 = 180 - \alpha_2'$, also

$$H_i = \frac{u_2}{g} c_2 \cos \alpha_2' \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (5).$$

Wir bezeichnen diese Arbeit H_i als »indizierte« Arbeit.

Die Arbeitsleistung ist nach Gl. (5) proportional dem Produkt aus der Umfangsgeschwindigkeit und der Umfangskomponente der absoluten Austrittsgeschwindigkeit. Wenn nicht hohe Umfangsgeschwindigkeiten verwendet werden, ist also stets mit einer beträchtlichen Rotation der Austrittsluft, also mit einem weniger guten Wirkungsgrad als bei den Turbinen mit Leitrad zu rechnen. Ferner zeigt Gl. (5), daß ohne Rotation der Austrittsluft eine Arbeitsleistung unmöglich ist[1]). Da nun nach Abb. 3

$$c_2 \cos \alpha_2' = w_2 \cos \beta_2 - u_2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (6),$$

so wird gemäß Gl. (5) und Gl. (4)

$$H_i = \frac{u_2}{g}(w_2 \cos \beta_2 - u_2) = \frac{u_2}{g}\left[\cos \beta_2 \sqrt{u_2^2 + c_0^2(1+\varepsilon_2)} - u_2\right] \quad \ldots (7).$$

Hieraus kann auch der Wirkungsgrad der betrachteten Teilturbine, der dann allerdings nur die Wirkung der tatsächlich durch das Rad getretenen Luft berücksichtigt und den Einfluß der Luftverdrängung nicht enthält, abgeleitet werden. Wir bezeichnen ihn als »scheinbaren Wirkungsgrad«. Die ganze im zuströmenden Wind vorhandene Geschwindigkeitshöhe beträgt

$$H_{th} = \frac{c_0^2}{2g}.$$

Es ist somit der scheinbare Wirkungsgrad

$$\eta_i = \frac{H_i}{H_{th}} = 2\frac{u_2}{c_0}\left[\cos \beta_2 \sqrt{\left(\frac{u_2}{c_0}\right)^2 + 1 + \varepsilon_2} - \frac{u_2}{c_0}\right] \quad \ldots \ldots (8).$$

Den Größtwert erreicht η_i bei konstantem ε_2, wenn das Geschwindigkeitsverhältnis $\frac{u_2}{c_0}$ den durch Ableitung von Gl. (8) nach $\frac{u_2}{c_0}$ sich ergebenden Wert

$$\left(\frac{u_2}{c_0}\right)_m = \sqrt{\frac{1+\varepsilon_2}{2}\left(\frac{1}{\sin \beta_2} - 1\right)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (9)$$

annimmt. Der zugehörige Wert des scheinbaren Wirkungsgrades ist

$$\eta_{i_m} = (1+\varepsilon_2)(1 - \sin \beta_2) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (10).$$

Aus dieser Gleichung, ebenso wie aus Gl. (8) geht hervor, daß die Arbeit der Teilturbine um so größer ist, je kleiner der Austrittswinkel β_2. Es wäre hiernach vorteilhaft, die Schaufeln so stark wie möglich entgegengesetzt zur Drehrichtung zu krümmen. Mit steigender Krümmung verengen sich aber die Schaufelkanäle am Austritt und wächst demnach die seitliche Verbreiterung des Luftstromes, also die Abdrängung der Arbeitsluft aus dem Rade nach außen. Deshalb wird die Gesamtleistung des Rades von einem gewissen günstigsten Wert des Austrittswinkels ab wieder schlechter werden.

3. Flächenwirkungsgrad, günstigster Schaufelwinkel am Austritt. Wir stellen uns die Aufgabe, die Verhältnisse so zu bestimmen, daß für jedes Element der Radfläche ein Größtwert an Arbeit erzielt wird. Fassen wir wieder die Ringfläche von Halbmesser y und der Breite dy am Austritt unserer Teilturbine ins Auge, und bezeichnen

[1]) Mit Rücksicht darauf, daß gemäß Gl. (5) stets eine Umfangskomponente der Austrittsgeschwindigkeit vorhanden sein muß, liegt der Gedanke nahe, ein zweites Rad hinter dem jetzt allein üblichen Laufrad anzuordnen, welches diese Umfangskomponente auszunützen hätte und demnach in entgegengesetzter Richtung zum ersten Rad umlaufen würde. Für dieses zweite Rad wäre das erste nichts anderes als ein umlaufender Leitapparat. Die Anordnung würde nur einen ganz unerheblichen Kraftgewinn ermöglichen und außerdem an ihrer Kompliziertheit scheitern.

wir mit dG das durch diese Ringfläche durchtretende sekundliche Luftgewicht, so ist die zugehörige sekundliche Arbeit

$$dA_i = H_i dG = H_i 2\pi y w_2 \sin\beta_2 \gamma dy \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11).$$

Die auf die betrachtete Ringfläche $2\pi y dy$ im freien Luftstrom entfallende Luftmenge besitzt einen Energieinhalt von der Größe

$$dA_h = H_{th} 2\pi y c_0 \gamma dy \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12).$$

Das Verhältnis der beiden Arbeiten dA_i und dA_{th} gibt ein Maß für die Ausnützung der Radfläche. Wir wollen diesen Wert als »Flächenwirkungsgrad« bezeichnen und erhalten

$$\eta_f = \frac{H_i}{H_{th}} \frac{w_2 \sin\beta_2}{c_0} = \eta_i \frac{w_2 \sin\beta_2}{c_0} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

oder gemäß Gl. (4) und (7):

$$\eta_f = 2\frac{u_2}{c_0}\sqrt{\left(\frac{u_2}{c_0}\right)^2 + 1 + \varepsilon_2}\left[\sqrt{\left(\frac{u_2}{c_0}\right)^2 + 1 + \varepsilon_2}\cos\beta_2 - \frac{u_2}{c_0}\right]\sin\beta_2 \quad . \; . \; . \quad (14).$$

Da die Anlagekosten der ganzen Maschine im wesentlichen durch die Größe der Radfläche bedingt sind, so gestattet der Flächenwirkungsgrad ein Urteil über die Anlagekosten für die KW Std. Er ist also in erster Linie maßgebend für die Beurteilung der Güte der Schaufeln. Für ein gegebenes Geschwindigkeitsverhältnis $\frac{u_2}{c_0}$ ist er nur abhängig vom Winkel β_2 und dem Unterdruck hinter dem Rad. Er wird mit $\beta_2 = 0$ zu Null und erreicht seinen Größtwert, sobald die Ableitung von η_f nach β_2 gleich Null wird. Da nach Gl. (4) bei festgehaltenem $u_2 : c_0$ auch $w_2 : c_0$ fest bleibt, können wir Gl. (14) durch Einführung von Gl. (4) vereinfachen zu

$$\eta_f = \frac{2\,u_2 w_2}{c_0^3}(w_2\cos\beta_2 - u_2)\sin\beta_2 = \frac{2\,u_2 w_2}{c_0^3}\left(\frac{w_2}{2}\sin 2\beta_2 - u_2\sin\beta_2\right) \quad . \quad (15).$$

Hier zeigt die Differentiation, daß für den günstigsten Austrittwinkel β_{2m} gelten muß:

$$\frac{\cos 2\beta_{2m}}{\cos\beta_{2m}} = \frac{u_2}{w_2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16).$$

Daraus rechnet sich einerseits

$$\operatorname{tg}\beta_{2m} = \sqrt{1 + {}^1/_2\left(\frac{u_2}{w_2}\right)^2 - {}^1/_2\frac{u_2}{w_2}\sqrt{8 + \left(\frac{u_2}{w_2}\right)^2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (17),$$

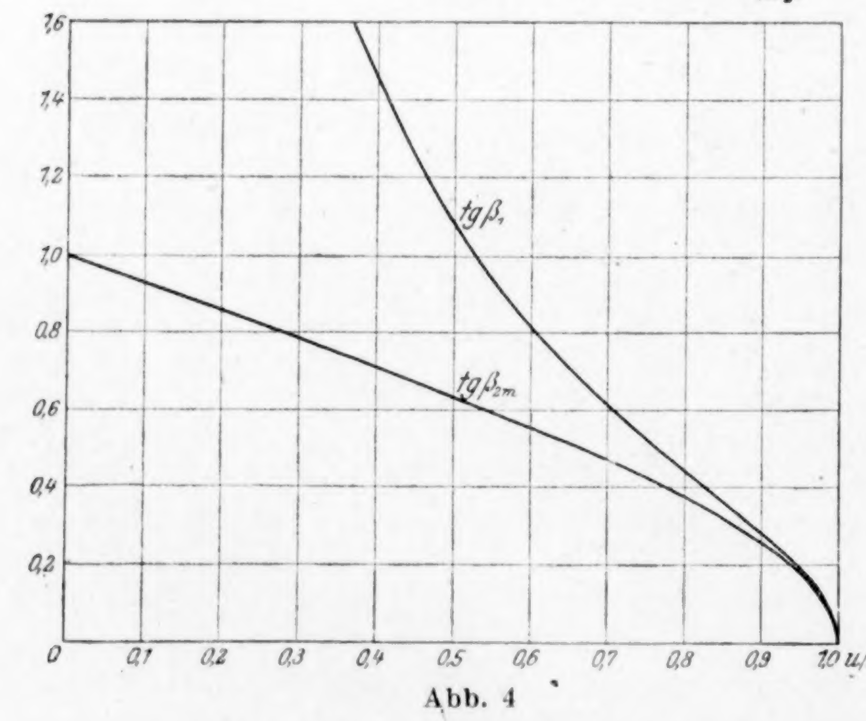


Abb. 4

andrerseits erkennt man in Abb. 3, daß Gl. (16) erfüllt ist, wenn $\alpha_2' = 90 - \beta_2$ gemacht wird, weil dann $\cos 2\beta_2$ gleich dem sinus des Winkels zwischen w_2 und c_2, $\cos\beta_2$ gleich dem des Winkels zwischen u_2 und c_2 wird. Die Gl. (17) ist in Abb. 4 graphisch dargestellt. In das gleiche Achsenkreuz sind auch die für dünne Räder sich ergebenden Werte von $\operatorname{tg}\beta_1$ eingetragen. Da hier $u_1 = u_2$ zu setzen ist, so wird nach Gl. (2)

$$\operatorname{tg}\beta_1 = \frac{c_1}{u_1} = \frac{c_1}{u_2} = \frac{w_2\sin\beta_{2m}}{u_2} = \frac{1}{\frac{u_2}{w_2}}\sin\beta_{2m} \quad . \; . \quad (18).$$

Da mit $\frac{u_2}{w_2}$ nach Gl. (4) auch $\frac{u_2}{c_0}$ abnimmt, so ist aus Abb. 4 ersichtlich, daß auch die Schaufelwinkel am Austritt ebenso wie die Schaufelwinkel am Eintritt mit abnehmendem Halbmesser wachsen. Bemerkenswert ist aber, daß am Austritt die günstigste Schaufelfläche keine Schraubenfläche ist.

Die zu den günstigsten Winkeln gehörigen Höchstwerte η_{fm} des Flächenwirkungsgrades erhalten wir, wenn wir in Gl. (14) die zu β_{2m} gehörigen Winkelfunktionen einsetzen. Unter Benutzung der Gl. (4) und (16) ergibt sich:

$$\eta_{fm} = \frac{\sqrt{2}}{8}\frac{u_2}{c_0}\left[\sqrt{9\left(\frac{u_2}{c_0}\right)^2 + 8(1+\varepsilon_2)} - 3\frac{u_2}{c_0}\right]\sqrt{3\left(\frac{u_2}{c_0}\right)^2 + 4(1+\varepsilon_2) - \frac{u_2}{c_0}\sqrt{9\left(\frac{u_2}{c_0}\right)^2 + 8(1+\varepsilon_2)}} \quad (19).$$

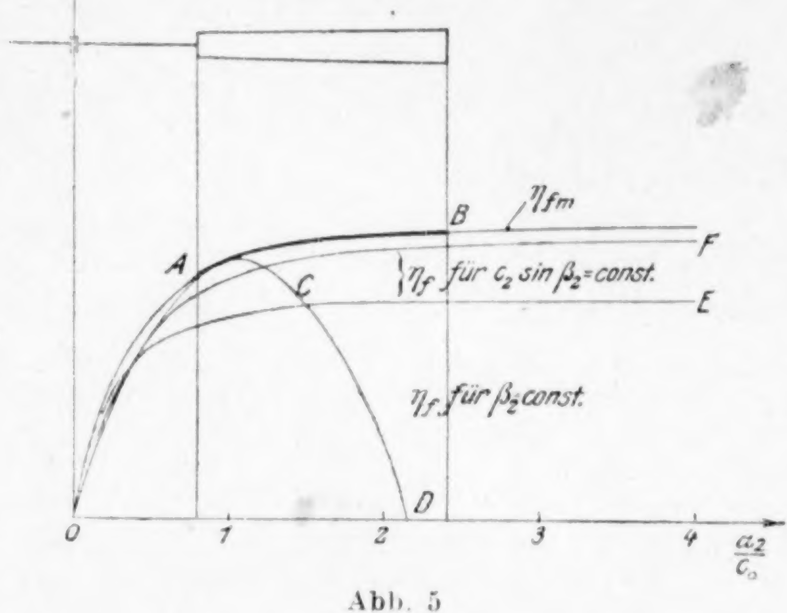


Abb. 5

Der Verlauf von η_{fm} nach dieser Gleichung ist für $\varepsilon_2 = 0$ in Abb. 5 nach der Linie OAB eingetragen. Daraus ist ersichtlich, daß der Flächenwirkungsgrad mit zunehmendem Wert von $\frac{u_2}{c_0}$ wächst und sich asymptotisch einem Größtwert nähert. Dieser ergibt sich aus Gl. (19) durch entsprechende Umformung

$$\eta_{f\max} = 2\sqrt{\left(\frac{1+\varepsilon_2}{3}\right)^3} \quad . \quad . \quad (20)$$

und beträgt für $\varepsilon_2 = 0$, $\eta_{f\max} = 0{,}384$, für den theoretischen Größtwert $\varepsilon_2 = {}^1/_3$, $\eta_{f\max} = {}^{16}/_{27} = 0{,}592$ [1]).

Die indizierte Arbeit wächst also mit der zunehmenden Umfangsgeschwindigkeit des Rades und ist am größten mit $\frac{u_2}{c_0} = \infty$.

Hiernach würde es von Vorteil sein, die Umdrehungszahl des Rades recht groß zu machen. Es ist aber zu berücksichtigen, daß von der hier ermittelten indizierten Arbeit noch die Reibung der Radarme in Abzug zu bringen ist, welche mit zunehmender Geschwindigkeit wächst. Auch wird das Drehmoment bei großer Geschwindigkeit sehr klein, so daß die Reibung in den Lagern und die Luftreibung verstärkt in die Wagschale fallen. Ferner erhält man bei großer Drehzahl, d. h. geringer Schrägstellung der Schaufeln einen großen Axialschub auf das Rad im Augenblick des Anlaufs und damit bei plötzlichen Windstößen erhebliche Belastungen der Radkonstruktion und des Gerüstes, welche also sehr schwer ausfallen müssen. Daraus folgt, daß von einem mittleren Wert des Geschwindigkeitsverhältnisses ab die Gesamtwirtschaftlichkeit abnimmt. Insbesondere müssen für den inneren Umfang des Rades kleinere Werte des Flächenwirkungsgrades in Kauf genommen werden, was unbedenklich ist, weil dort die Arbeitsfläche klein ist.

Geht man am inneren Umfang mit $\frac{u_2}{c_0}$ auf 0,8 bis 1, so wird, da dessen Durchmesser meist gleich dem dritten Teil des Außendurchmessers ist, das Geschwindigkeitsverhältnis am äußeren Umfang gleich 2,4 bis 3. In Abb. 5 ist zu den kleineren Werten der zugehörige Kurvenzweig AB über dem Rad angegeben. Es dürften wahrscheinlich mit dieser Annahme brauchbare Verhältnisse eingetreten sein.

Es ist noch von Interesse, die Verhältnisse zu verfolgen, die sich ergeben, wenn für den Austrittswinkel β_{2m} ein anderes einfaches Gesetz als das für den günstigsten Fall abgeleitete zugrunde gelegt wird. In Abb. 5 sind für mehrere solche Vergleichsfälle die Linien der η_f neben der Linie der η_{fm} eingetragen.

Für den einfachsten Fall eines konstanten Austrittswinkels über die ganze Radfläche ergibt sich die parabelähnliche Kurve OCD, welche für $\beta_2 = 25^0$ gezeichnet ist. Wie ersichtlich, verläuft diese grundsätzlich anders und wesentlich ungünstiger als die Linie der η_{fm}. Der Berührungspunkt mit letzterer wird offenbar bei dem Geschwindigkeitsverhältnis erhalten, für welches aus den abgeleiteten Gleichungen oder der Linie der $\operatorname{tg}\beta_{2m}$ des Kurvenblattes der gewählte Winkel sich ergibt. Die Kurve der η_{fm} muß offenbar die Einhüllende aller übrigen Kurven der η_f für $\beta_2 =$ konst. sein.

Ein anderes wichtiges Gesetz, das praktische Bedeutung besitzt, ist dasjenige, welches für jeden Stromfaden die gleiche axiale Komponente der Austrittsgeschwindigkeit ergibt. Ist letztere gleich kc_0, so ist $kc_0 = w_2 \sin\beta_2$ oder

$$\sin\beta_2 = \frac{kc_0}{w_2} = \frac{kc_0}{\sqrt{u_2^2 + c_0^2(1+\varepsilon_2)}} = \frac{k}{\sqrt{\left(\frac{u_2}{c_0}\right)^2 + 1 + \varepsilon_2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21).$$

---

[1]) Vergl. Ziffer 5. Der größtmögliche Wert ${}^{16}/_{27}$ für den Flächenwirkungsgrad stimmt, da hier ε_2 der Theorie der idealen Strahlbewegung entnommen ist, mit dem von Hoff und Betz (Fußbemerkung 4 S. 180) ermittelten überein.

Mit Gl. (21) wird Gl. (14)

$$\eta_f = 2\left[\sqrt{\left(\frac{u_c}{c_0}\right)^2 + 1 + \varepsilon_2 - k^2} - \frac{u_2}{c_0}\right] k \frac{u_2}{c_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22).$$

Ist hierin $\varepsilon_2 = 0$, so wird mit $k = 1$, $\eta_f = 0$, wie zu erwarten. Mit $k = 0{,}8$ erhält man den Verlauf der Kurve OE der Abb. 5, welche ziemlich tief liegt. Bemerkenswert ist aber, daß bei diesem Gesetz die Wirkungsgradkurve sich wieder asymptotisch einem Größtwert nähert. Mit $k = 0{,}6$ fällt die Kurve sogar fast genau mit der günstigsten zusammen. Das gleiche ist für die Winkel β_2 der Fall, wie folgende Zahlen zeigen:

$\frac{u_2}{c_0}$	0,5	1	2	3	4
η_{fm}	0,267	0,337	0,370	0,378	0,381
η_f nach Gl. (22)	0,21	0,336	0,361	0,375	0,378
β_{2m}	34°8'	25°5'	15°9'	10°30'	8°4'
β_2 nach Gl. (21)	32°20'	25°	15°30'	10°50'	8°20'

Diese Feststellung ist insofern von Wichtigkeit, als das Gesetz der Gl. (21), das dem der Schraubenflächen ziemlich ähnlich ist, zu wesentlich einfacheren mathematischen Ausdrücken führt als das theoretisch richtige und deshalb die praktischen Rechnungen erheblich zu vereinfachen gestattet. Auch geht daraus hervor, daß bei der günstigsten Schaufelform nur verschwindend kleine Unterschiede in der axialen Austrittsgeschwindigkeit bei verschiedenem Halbmesser auftreten, und daß geringe Abweichungen von β_2 gegenüber β_{2m} für das ausgeführte Windrad ohne Bedeutung sind, was die Herstellung wesentlich erleichtern dürfte. Ist k kleiner als 0,6, so wird η_f wieder schlechter. Mit $k = 0{,}5$ ist die Linie OF der Abbildung 5 errechnet.

Die für $k = 0{,}6$ festgestellte nahe Uebereinstimmung mit den günstigsten Verhältnissen ist auch für einen von Null verschiedenen Wert von ε_2 vorhanden, wenn $k = 0{,}6\sqrt{1 + \varepsilon_2}$ gesetzt wird. Hieraus folgt, daß für praktische Rechnungen die Abmessungen der günstigsten Schaufelform auch allgemein errechnet werden können aus den folgenden Gleichungen:

$$c_1 = 0{,}6\sqrt{1 + \varepsilon_2}\, c_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23),$$

$$\operatorname{tg} \beta_{2m} = \frac{0{,}6\sqrt{1 + \varepsilon_2}}{\sqrt{\left(\frac{u_2}{c_0}\right)^2 + 0{,}64\,(1 + \varepsilon_2)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24),$$

$$\operatorname{tg} \beta_1 = 0{,}6 \frac{c_0}{u_2} \sqrt{1 + \varepsilon_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25),$$

$$\eta_{fm} = 1{,}2\left[\sqrt{\left(\frac{u_2}{c_0}\right)^2 + 0{,}64\,(1 + \varepsilon_2)} - \frac{u_2}{c_0}\right] \frac{u_2}{c_0} \sqrt{1 + \varepsilon_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26).$$

Die Gl. (23) zeigt, daß von der zutretenden Windmenge für den Fall der besten Windausnützung nur das $0{,}6\sqrt{1 + \varepsilon_2}$fache durch die Radfläche tritt.

Die Gleichungen (24) und (25) ebenso wie Abb. 4 lassen erkennen, daß die Krümmung der Schaufel um so geringer ist, je größer das Geschwindigkeitsverhältnis $\frac{u_2}{c_0}$.

4. Die Arbeitsleistung des Windrades kann in der Weise berechnet werden, daß man den Ausdruck auf der rechten Seite der Gl. (11) zwischen den Grenzen r_i und r_a, Abb. 1, integriert, nachdem man vorher für u_2 den aus Gl. (4) folgenden Wert und für die Winkelfunktionen $\sin \beta_2$ und $\cos \beta_2$ die zu β_{2m} gehörigen Werte eingesetzt hat. Hierfür schlagen wir das folgende graphische Verfahren, das auch sehr anschaulich ist, vor.

Um von den verwendeten Maßstäben unabhängig zu sein, bestimmt man zuerst den indizierten Wirkungsgrad des ganzen Rades

$$\eta_g = \frac{A_i}{A_{th}},$$

worin mit Bezug auf Gl. (12)

$$A_i = \int_{r_i}^{r_a} \eta_f\, d\,A_i = 2\,\pi\, c_0\, \gamma\, H_{th} \int_{r_i}^{r_a} \eta_f\, y\, d\,y$$

$$A_{th} = 2\,\pi\, c_0\, \gamma\, H_{th} \int_{r}^{r_a} y\, d\,y,$$

somit

$$\eta_g = \frac{\int\limits_{r_i}^{r_a} \eta_f\, y\, dy}{\int\limits_{r_i}^{r_a} y\, dy} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (27).$$

Das Integral im Zähler ergibt sich als Inhalt einer Fläche, wenn die Linie der $\eta_f y$ aus den η_f-Werten ermittelt wird. Wählt man hierbei als Ordinatenmaßstab $1 = r_a$, so erhält man für irgend einen Punkt P der η_f Linie, Abb. 6, den zugehörigen Punkt A der $\eta_f y$-Linie, ohne zu rechnen, wenn man zieht: $PN \parallel OC$ und ON, welch letztere die zugehörige Ordinate in Q schneidet. Der Zähler ist dann die Fläche $ABCD$ zwischen dem in Betracht kommenden Kurvenstück AB und der Abszissenachse. Der Nenner ist das Trapez $CDEF$, in welchem $CF = 1$. Es ist nunmehr

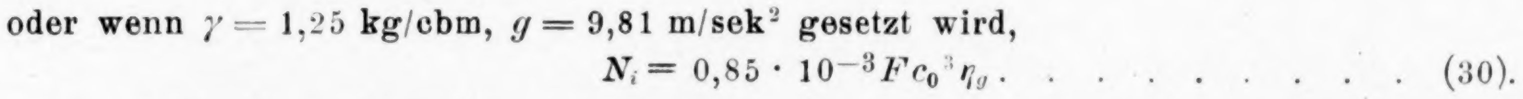
$$\eta_g = \frac{\text{Fläche } ABCD}{\text{Fläche } CDEF} \quad \ldots \ldots (28).$$

Abb. 6

Die Fläche $ABCD$ entspricht der geleisteten Arbeit. Die Fläche $CDEF$ der auf den Querschnitt des Windrades entfallenden Energie der bewegten Luftmassen, die Fläche $BAEF$ den Verlusten.

Die Leistung des Rades in Pferdestärken beträgt nunmehr, wenn $F = \pi(r_a^2 - r_i^2)$ die mit Schaufeln besetzte Radfläche

$$N_i = \frac{\gamma}{g}\,\frac{F}{75}\,c_0^3\,\eta_g \quad \ldots \ldots (29),$$



oder wenn $\gamma = 1{,}25$ kg/cbm, $g = 9{,}81$ m/sek^2 gesetzt wird,

$$N_i = 0{,}85 \cdot 10^{-3} F c_0^3 \eta_g \, . \ldots \ldots \ldots \ldots (30).$$

Bei den vorstehenden Betrachtungen ist nur die Arbeit des durch die Austrittsflächen strömenden Windes berücksichtigt. Nun tritt aber nach Abb. 1 außerdem am inneren wie äußeren Umfang eine gewisse Windmenge seitlich aus, die je nach dem Verlauf der Stromlinien und der Form der Schaufel sich in mehr oder minder erheblichem Maße an der Arbeitsleistung beteiligen wird. Ihre Berücksichtigung bei der Berechnung der Radleistung würde in Abb. 6 zur Folge haben, daß die Linien der η_f und $\eta_f y$ nach rechts und links wie gestrichelt eingezeichnet verlängert werden. Da diese Seitenleistung ohne mehr oder weniger willkürliche Annahme der Stromlinien nicht zu ermitteln ist, und sie offenbar nur einen kleinen Bruchteil der Gesamtleistung ausmacht, so glauben wir, sie vernachlässigen zu dürfen.

5. Der Unterdruck hinter dem Rad. Ueber die Größe des für die Radleistung so wichtigen Unterdruckes hinter dem Rad liegen brauchbare Versuchsergebnisse bis jetzt leider nicht vor. Bei vollen Scheiben wurde von Prandtl in der Mitte der Wert $\Delta h_2 = 0{,}37\, c_0^2/2\, g$, also $\varepsilon_2 = 0{,}37$ ermittelt. Bei Windrädern mit hohen Umdrehungszahlen, bei welchen die Austrittsgeschwindigkeit fast genau axial gerichtet ist, kann die Bestimmung von ε_2 unter Zuhilfenahme der Theorie der idealen Strahlbewegung erfolgen. Aus dieser ergibt sich nämlich[1]) eine Verlangsamung des Windes hinter dem Rad derart, daß die Endgeschwindigkeit c_3 die Gleichung erfüllen muß

$$c_1 = \frac{c_0 + c_3}{2},$$

woraus unter Benutzung der angenähert gültigen Gl. (23)

$$c_3 = 2\,c_1 - c_0 = c_0\left(1{,}2\sqrt{1 + \varepsilon_2} - 1\right).$$

[1]) Vergl. die in der Fußnote S. 180 erwähnten Arbeiten von Betz und Munk.

Damit ergibt sich, da $\Delta h_2 = \varepsilon_2 \frac{c_0^2}{2g} = \frac{c_1^2 - c_3^2}{2g}$ eine Bestimmungsgleichung für ε_2, aus welcher folgt:

$$\varepsilon_2 = 0{,}33.$$

Die Benutzung der genauen Gleichung für c_1 hätte $\varepsilon_2 = {}^1/_3$ ergeben. Dieser Wert erscheint im Vergleich zu dem für volle Scheiben durch den Versuch ermittelten ziemlich hoch, schon deshalb, weil er den Einfluß der umgebenden Luft noch nicht enthält. Da am Rande der Radscheibe der Unterdruck jedenfalls sehr klein und tatsächlich eine den Unterdruck verringernde Umfangskomponente am Austritt vorhanden ist, so werde, so lange keine Versuche an Windrädern vorliegen, mit dem Mittelwert $\varepsilon_2 = 0{,}25$ gerechnet.

6. Zahlenbeispiel. Es soll die Schauflung eines Windrades von 12 m äußerem und 4 m innerem Durchmesser errechnet und die Radleistung bei einer Windgeschwindigkeit von 5 m/sek. untersucht werden.

Wir wählen das Geschwindigkeitsverhältnis am Umfang $\frac{u_2}{c_0} = 3$, und erhalten damit die verhältnismäßig große Umfangsgeschwindigkeit $u_2 = 3 \cdot 5 = 15$ m/sek. Bei Benutzung der genauen Gleichungen mit $\varepsilon_2 = 0{,}25$ geschieht die Ausrechnung unter Zugrundelegung einer dünnen Radscheibe nach der folgenden Tabelle, in welcher auf der rechten Seite die benutzte Gleichung angegeben ist.

$x = y$	2	3	4	5	6	Meter
$\frac{u_1}{c_0} = \frac{u_2}{c_0} = \frac{u}{c_0}$	1	1,5	2	2,5	3	
$\frac{w_2}{c_0}$	1,50	1,871	2,291	2,739	3,202	Gl. (4)
$\frac{u}{w_2}$	0,667	0,802	0,873	0,913	0,937	
$\operatorname{tg} \beta_{2m}$	0,504	0,381	0,298	0,245	0,205	Abb 4 oder Gl. (17)
$\operatorname{tg} \beta_1$	0,675	0,445	0,327	0,260	0,214	Gl. (18)
η_{fm}	0,458	0,494	0,518	0,527	0,532	Gl. (19)

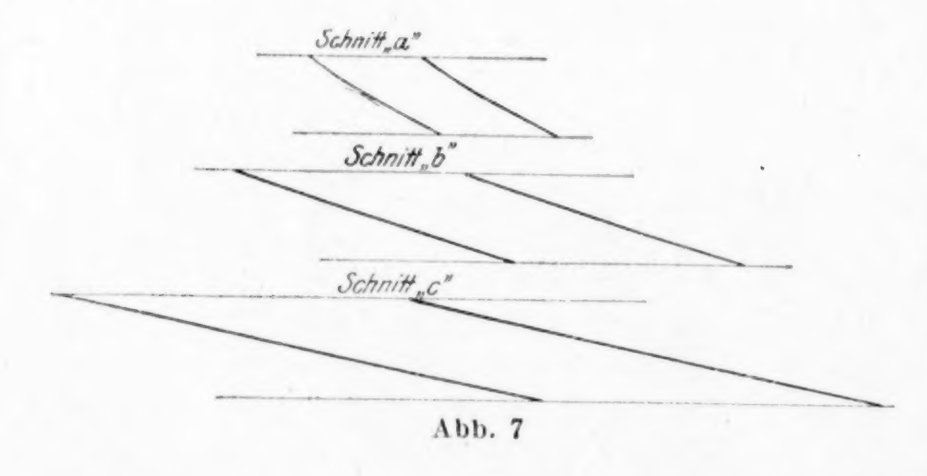


Abb. 7

In Abb. 7 sind die Schaufelschnitte für die Halbmesser 2, 4, 6 m nach den ermittelten Werten von $\operatorname{tg} \beta_1$ und $\operatorname{tg} \beta_{2m}$ aufgezeichnet unter Zugrundelegung einer Zahl von 21 Schaufeln. Die Projektion der Schaufeln auf die Axialebene zeigt Abb. 6. In dieses Bild ist auch die η_f Kurve eingezeichnet. Aus dieser erhalten wir nach dem S. 187 beschriebenen Verfahren die $\eta_f y$-Linie AB und damit als Gesamtwirkungsgrad nach Gl. (28) ohne Seitenleistung und Luftreibung

$$\eta_g = 0{,}521.$$

Die Radleistung ist somit nach Gl. (30)

$$N_i = 0{,}85 \cdot 10^{-3} \pi (6^2 - 2^2)\, 5^3 \cdot 0{,}521 = 5{,}55 \text{ PS}_i.$$

Wesentlich einfacher als die vorstehende gestaltet sich die Ausrechnung nach dem S. 186 abgeleiteten Näherungsverfahren. Hier ergibt sich die folgende Tabelle, in der die benutzten Gleichungen ebenfalls angegeben sind:

$\operatorname{tg} \beta_1$	0,671	0,447	0,335	0,268	0,224	Gl. (25)
$\operatorname{tg} \beta_{2m}$	0,500	0,384	0,306	0,253	0,214	» (24)
η_{fm}	0,4585	0,496	0,512	0,520	0,525	» (26)

Diese Zahlen weichen von den nach dem genauen Verfahren ermittelten Werten meist erst in der dritten Dezimale ab.

Für Räder mit anderen Durchmessern können die abgeleiteten Zahlen ohne weiteres verwendet werden, wenn beachtet wird, daß die Winkel und die Wirkungsgrade für die gleichen Geschwindigkeitsverhältnisse die gleichen sind. 32

Braunschweig, den 28. Januar 1921.

Anwendung des logarithmischen Druck-Volumen-Bildes für Wärmevorgänge.

Von **K. KÖRNER** in Prag.

Für die zeichnerische Darstellung von Wärmevorgängen sind die allgemeinen Gleichungen der Thermodynamik maßgebend:

$$d\,u = T\,d\,s - A\,p\,d\,v$$
$$d\,i = T\,d\,s + A\,v\,d\,p,$$

worin $d\,u$ und $d\,i$ die Aenderungen der inneren Energie und des Wärmeinhalts bei gleichbleibendem Druck für die Gewichtseinheit des Wärmeträgers, T die absolute Temperatur, $d\,s$ die Aenderung der Entropie für die Gewichtseinheit, p und v Druck und spezifisches Volumen bedeuten. Die Wärmezufuhr ist $\bar{d}q = T\,d\,s$, mit $\bar{d}$ bezeichnet, weil kein vollständiges Differential. Sind ferner c_v und c_p die Wärmekapazitäten bei gleichbleibendem Volumen und gleichbleibendem Druck, so wird, wenn jedesmal der Index die gleichbleibende Veränderliche bedeutet:

$$d\,u_v = \bar{d}q_v = c_v\,d\,T = T\,d\,s$$
$$d\,i_p = \bar{d}q_p = c_p\,d\,T = T\,d\,s.$$

Die Gleichartigkeit der allgemeinen Beziehungen für die Veränderlichen T, s und p, v lassen erwarten, daß auch die zeichnerische Darstellung gleichwertig sei, wenn man eine dieser beiden Gruppen als Koordinaten wählt. Es zeigt sich jedoch, daß dies deshalb nicht ganz der Fall ist, weil die besonders häufig gebrauchten Linien $T =$ konst. und $s =$ konst., d. h. Isotherme und Adiabate, im Entropie-Temperatur-Bild gerade Linien sind, deren Lage von vornherein gegeben ist, während dies im Druck-Volumen-Bild nicht der Fall ist. Hier wieder sind die Linien $p =$ konst. und $v =$ konst. gegebene Gerade, deren Abbildung im Temperatur-Entropie-Bild die bekannten Tafeln erfordert.

Es ist wohl angeregt worden[1]), eine Tafel einzuführen, die als Abszissen die Entropiewerte, als Ordinaten die Logarithmen der Temperaturen aufweist und bei der alle polytropischen Linien als Gerade erscheinen, ebenso ist mehrfach angegeben worden, daß dies auch durch Verwendung der Logarithmen von p und v als Koordinaten erreicht wird. Im folgenden soll nun gezeigt werden, daß die genannten Darstellungsarten sich miteinander verbinden lassen und dann für manche Zwecke ungemein bequem werden, so daß man oft gar keine vorgezeichnete Tafel nötig hat und auch, weil man etwaige Abweichungen von den Gesetzen der idealen Gase deutlich erkennen kann.

Man sieht, daß beim logarithmischen Druck-Volumen-Bild die Linien $p =$ konst. und $v =$ konst. Parallele zu den Koordinatenachsen sind. Da ferner für Gase das Boyle-Gay-Lussacsche Gesetz mit genügender Genauigkeit gültig angenommen werden darf, werden auch die Isothermen: $p\,v =$ konst. wegen:

$$\ln p + \ln v = y + x = \text{konst.}$$

gerade Linien, deren Richtung durch $\frac{dy}{dx} = -1$ gegeben ist. Ebenso sind alle Polytropen:

$$p\,v^{\mu} = \text{konst. oder}$$
$$\ln p + \mu \ln v = y + \mu\,x = \text{konst}$$

gerade Linien mit der Neigung $\frac{dy}{dx} = -\mu$ gegen die Abszissenachse.

Bei großen Temperaturunterschieden weichen die Adiabaten von diesen Linien ab und sind dann in Tafeln einzutragen, wie später gezeigt wird. Aber schon die bisherigen Bemerkungen genügen zur Darstellung des Verdichtungsvorganges bei mäßigen Temperaturunterschieden.

Die gesamte Verdichtungsarbeit setzt sich aus der reinen Verdichtungsarbeit und den beim Ansaugen und beim Ausschub erforderlichen Arbeiten zusammen. Die Summe ist durch den Ausdruck $\int_{p_1}^{p_2} v\,dp$ gegeben, worin man setzen kann:

$$v\,dp = p\,v\,\frac{dp}{p} = p\,v\,d\ln p = p\,v\,d\,y.$$

---

[1]) Richards, Bulletin 63, University of Illinois.

Hieraus ergibt sich, daß das Element der Verdichtungsgesamtarbeit durch einen horizontalen Streifen von der Dicke dy dargestellt werden kann, dessen Länge pv im logarithmischen Maße leicht einzutragen ist, da $\ln pv = \ln p + \ln v = y + x$. Sie reicht, wie Abb. 1 zeigt, vom »Zustandspunkt« 1 bis zu der durch den Koordinatenanfangspunkt unter 135° gegen die positive x-Achse gezogenen Geraden. Auf diese Weise erhält man ein anschauliches Bild des Wärmeinhalts, wenn auch in der betreffenden Fläche kein unmittelbares Maß seiner Größe.

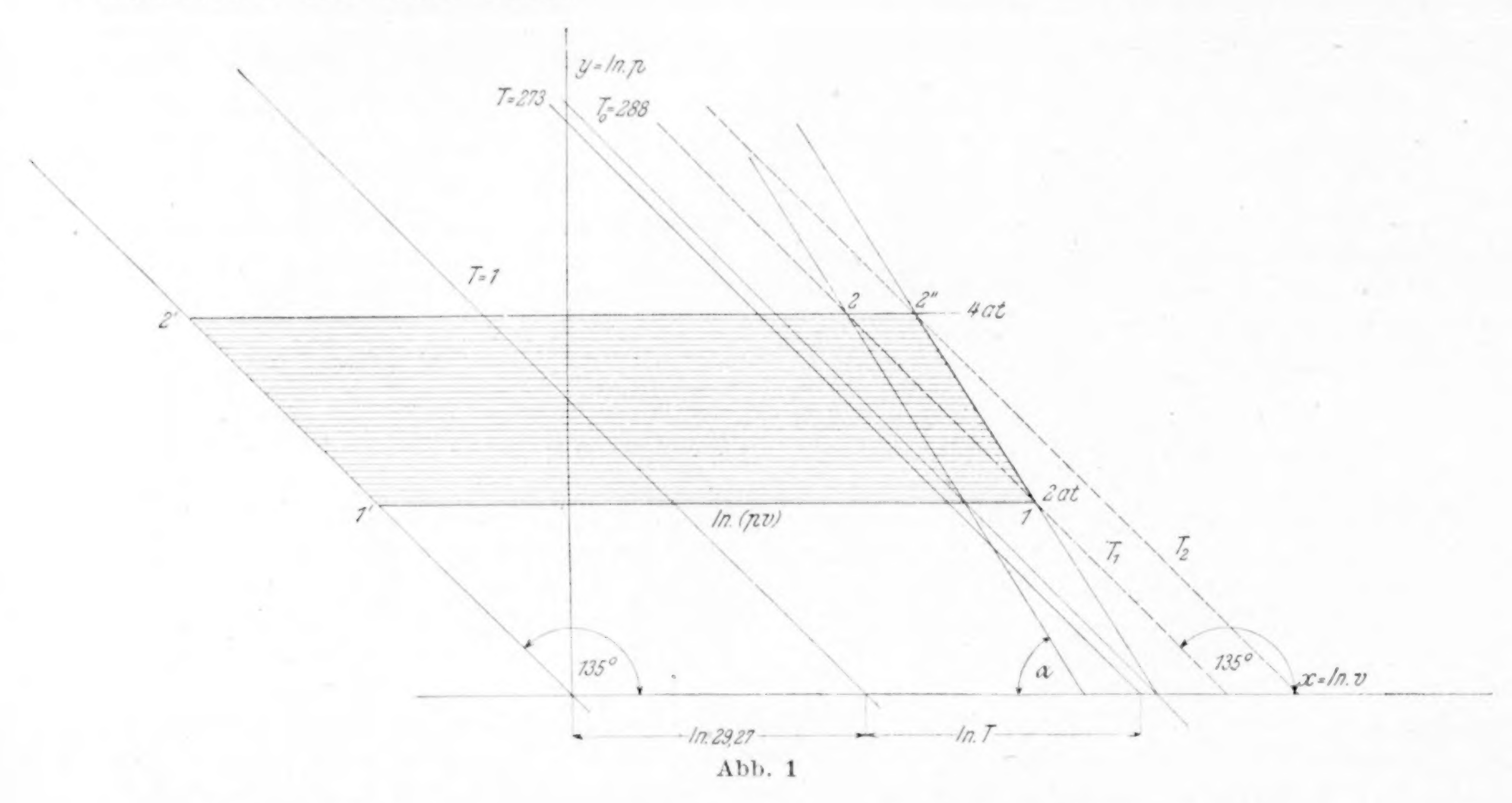


Abb. 1

Liegen in Abb. 1 z. B. die Punkte 1 und 2 auf einer Adiabate, ist also:

$$\operatorname{tg} \alpha = \varkappa,$$

so gibt die Fläche 122' 1' ein Bild für $pv\,dy = \frac{c_p\,d\,T}{A}$, weil die Wärmezufuhr $\bar{d}q = 0$ ist.

Für die Isotherme 12'' $\parallel$ 1' 2' ist hingegen $\frac{\bar{d}q}{A} = -pv\,dy$, d. h. die abzuführende Wärmemenge ist durch den Streifen links von 12'' dargestellt.

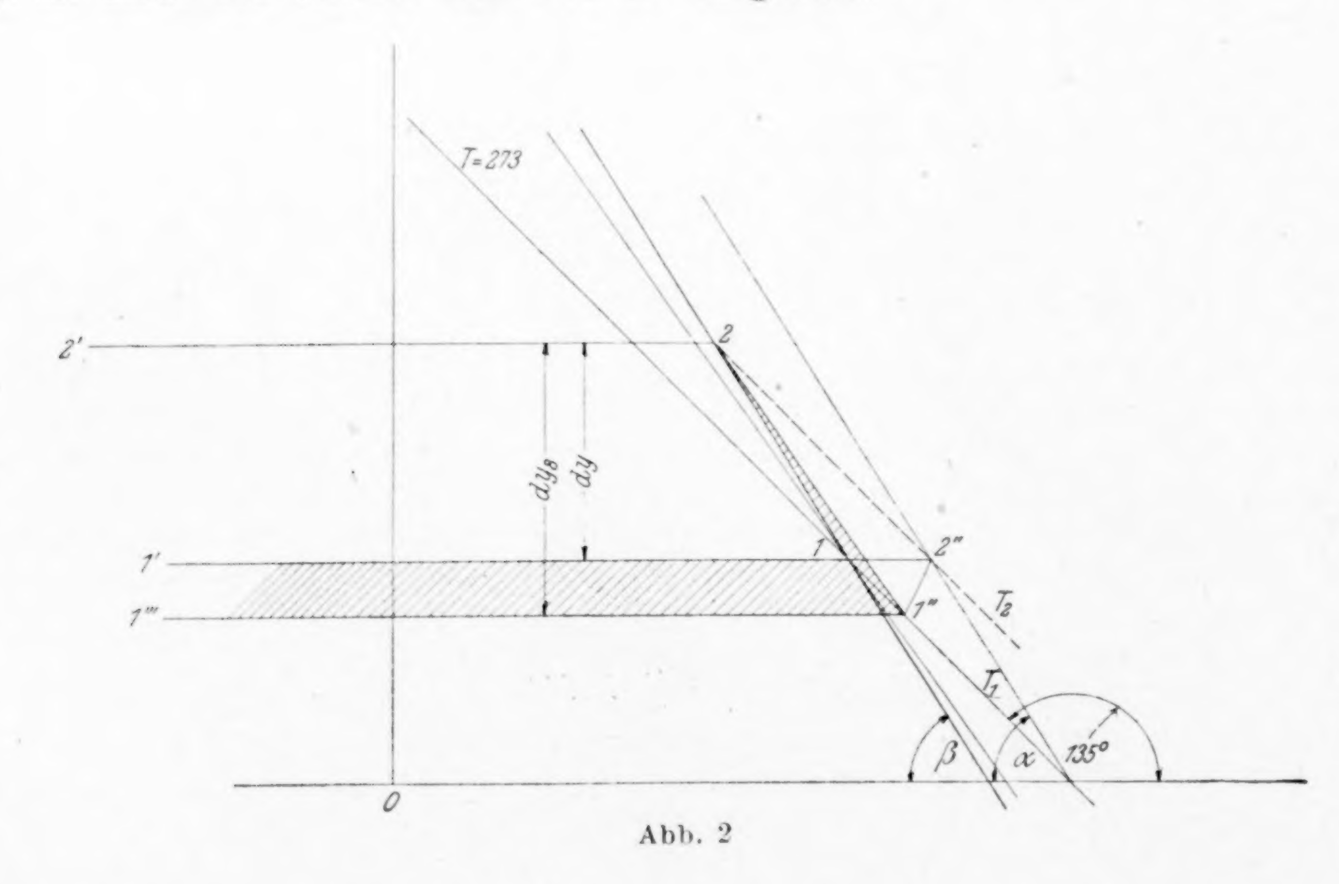


Abb. 2

Hat man endlich eine beliebige Polytrope mit dem Exponenten μ, Abb. 2, so findet man aus der Gleichung: $\frac{d\bar{q}}{A} = c_p \frac{dT}{A} - v\,dp = pv\,dy_s - pv\,dy$, in der dy_s und dy die Aenderungen von y für gleiche Temperaturunterschiede für die Adiabate und die Polytrope bedeuten, das Bild für dq, indem man durch 2 eine Adiabate legt, die die Isotherme T_1 in 1'' schneidet. Der schraffierte Streifen, der auch durch 1''' 1'' 2'' 1' ersetzt werden kann, gibt die Darstellung von $\frac{d\bar{q}}{A}$ auch für endliche Vorgänge.

Wir wenden sie bei einem dreistufigen Kreiselverdichter an, der Luft von 1 at abs. und 15° C auf 8 at abs. verdichten soll; das Druckverhältnis soll für jede Stufe gleich groß, also gleich 2 sein, so daß die absoluten Drücke vor und hinter jedem Rad sind:

$$p_0 = 1 \text{ at}, \quad p_1 = 2 \text{ at}, \quad p_2 = 4 \text{ at}, \quad p_3 = 8 \text{ at}.$$

Wir nehmen vorerst an, daß die Kühlung nach jeder Stufe bis auf die Anfangstemperatur erfolgt. Zieht man in unserem Bild die Linie $T = 288°$, so enthält sie alle drei Anfangspunkte der Verdichtungslinien für die einzelnen Stufen

Sie ist gegeben durch die Gleichung:

$$x + y = \ln (29{,}27 \cdot 288) = \ln 29{,}27 + \ln 288 = 9{,}04.$$

Da die Temperaturgrenzen mäßig sind, können die Adiabaten als gleich geneigte Gerade mit $\varkappa = 1{,}4$ angenommen werden, bei Zylinderkühlung wären die Verdichtungslinien mit $\mu \sim 1{,}3$ zu wählen, hingegen verlaufen sie durch die in jedem Rade auftretenden Reibungswärmen entsprechend steiler. Die Flächen links von den Verdichtungslinien geben

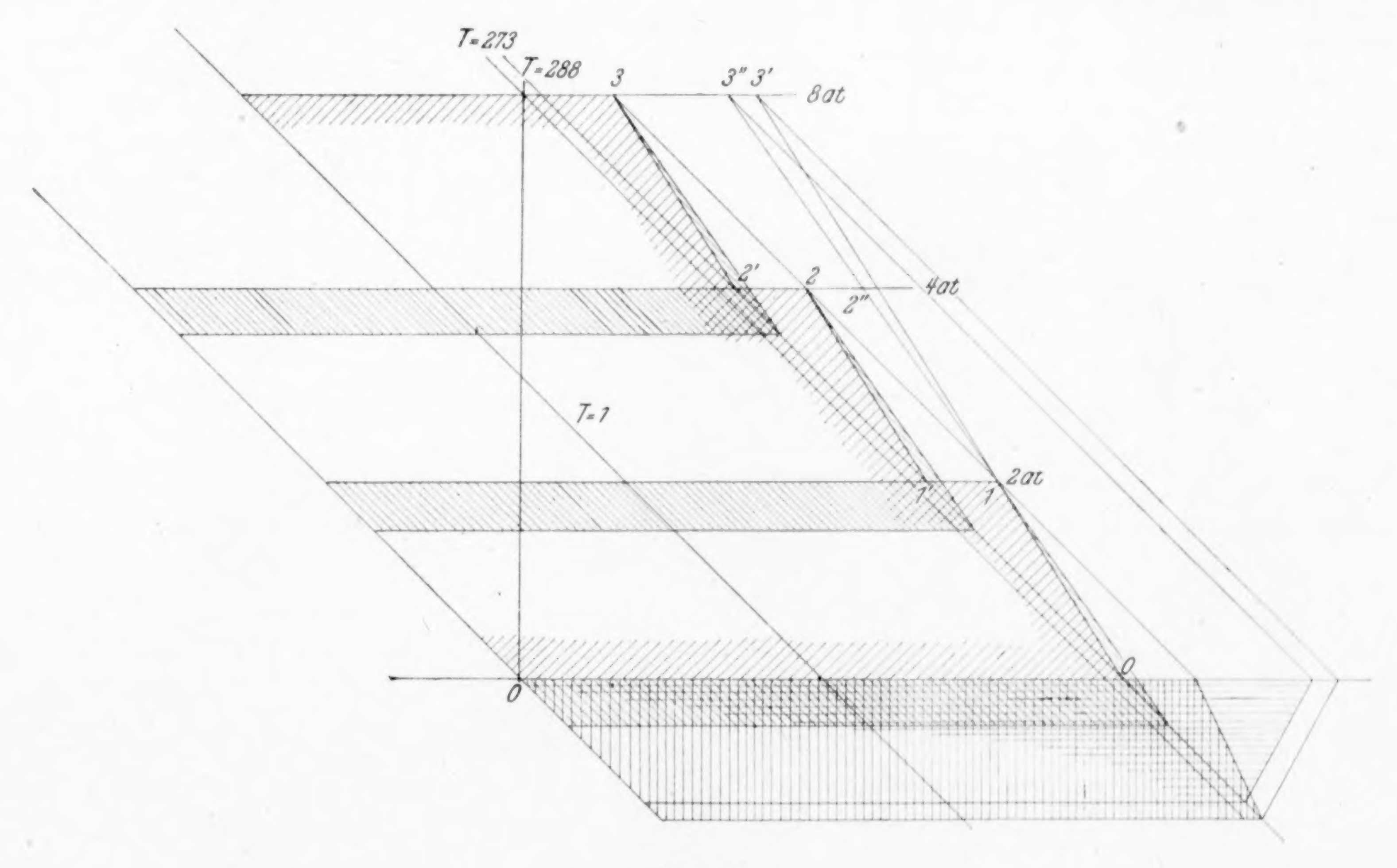


Abb. 3

das Bild der wirklichen Verdichtungsarbeit, Abb. 3 /////, die dabei zugeführten Reibungswärmen sind durch die Streifen \\\\\ bestimmt, die, wie man sieht, die Arbeitsflächen teilweise überdecken und auch durch die außerhalb derselben liegende vertikal schraffierte Fläche ||||| ersetzt werden können. Die ganze aufgewendete Arbeit ist $3\,c_p\,(T_1 - T_0)$ und entspricht dem Umriß aller schräg ///// und senkrecht ||||| schraffierten Flächen.

Die Endtemperaturen T_1 finden sich leicht aus:

$$x_1 + y_1 = \ln 29{,}27 + \ln T_1 = 3{,}37655 + \ln T_1,$$

indem man in der Entfernung $x = 3{,}37655$ eine Temperaturlinie für $T = 1$ zieht und von dieser aus in der Richtung der Abszissenachse die Entfernung des Zustandspunktes 1 logarithmisch im gleichen Maßstab wie $\ln v$ abmißt. Ohne Zwischenkühlung käme man

zum Verdichtungsendpunkt 3', wenn angenommen wird, daß der Exponent der Polytrope in allen Stufen gleich bleibt, hingegen zum Punkt 3'', wenn etwa die Reibungsarbeit in jeder Stnfe gleich groß angenommen wird.

Man kann auf diese Weise alle Aufgaben wie mit dem Entropietemperaturbild lösen, ohne daß man Tafeln mit eingezeichneten Kurven nötig hat. Dieses logarithmische Druckvolumenbild kann aber auch zur Darstellung der Vorgänge im Verbrennungsmotor verwendet werden, wo einerseits durch weitgehende Druckänderungen und andererseits durch die beim Verbrennungsvorgang auftretende Wärmemenge große Temperaturunterschiede auftreten; hier muß die Veränderlichkeit der spezifischen Wärmen mit der Temperatur berücksichtigt werden.

Man kann bekanntlich genügend genau setzen:

$$c_v = \alpha_v + \beta T, \quad c_p = \alpha_p + \beta T,$$

womit das Differential der Entropie wird:

$$ds = \frac{d\bar{q}}{T} = \frac{c_v}{T} d T + \frac{A p}{T} dv = \frac{\alpha_v}{T} d T + \beta d T + A R \frac{d v}{v}.$$

Daraus folgt durch Integration:

$$s = \alpha_v \ln \frac{T}{T_0} + \beta (T - T_0) + A R \ln \frac{v}{v_0}.$$

Sind für $s = 0$:

$$p_0 = 1, \quad v = v_0, \quad T_0 = 273^0,$$

so wird hierfür:

$$v_0 = R T_0 = 273 R$$

$$\ln v_0 = x_0 = \ln R + 5{,}6095.$$

Der Nullpunkt des Wertbildes hängt demnach von der Art des Wärmeträgers durch die Größe von R ab. Da bei Verbrennungskraftmaschinen die Zusammensetzung des gasförmigen Arbeitskörpers wechselt, würde dies eine Erschwernis in der Verwendung der Schaubilder bewirken, weshalb man bekanntlich besser mit einem Mol statt mit dem Einheitsgewicht rechnet.

Ist m das scheinbare Molekulargewicht der Gasmischung, so sollen folgende Bezeichnungen eingeführt werden:

$$m s = \mathfrak{S}, \quad m \alpha_v = a_v, \quad m \alpha_p = a_p, \quad m \beta = b, \quad m R = \mathfrak{R} = 848, \quad m v = \mathfrak{B}.$$

Damit ergibt sich:

$$\ln \mathfrak{B}_0 = x_0 = 6{,}7429 + 5{,}6095 = 12{,}3524$$

und

$$\mathfrak{S} = a_v \ln \frac{T}{T_0} + b (T - T_0) + A \mathfrak{R} \ln \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}_0}.$$

Hierin ist neben $\mathfrak{R}$ auch $\mathfrak{B}_0$ für alle in Betracht kommenden Arbeitskörper gleich groß. Da der Wert von $\mathfrak{S}$ bei gleichbleibender Temperatur nur mehr von

$$\ln \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}_0} = x - x_0$$

abhängt, ist es naheliegend, ihn in der Richtung gleichbleibender Temperaturen zu messen, also unter 135^0 gegen die x-Achse, wobei nur die Nullinie für $\mathfrak{S} = 0$ zu bestimmen sein wird, so daß die Entfernung des Zustandspunktes von dieser Linie in der angegebenen Richtung unmittelbar die Entropie in einem gegebenen Maßstab ergibt.

Will man diese Nullinie verzeichnen, so ist zu berücksichtigen, daß mit $p_0 = 1$

$$\ln \frac{T}{T_0} = \ln \frac{p \mathfrak{B}}{p_0 \mathfrak{B}_0} = \ln p + \ln \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}_0} = y + (x - x_0)$$

wird. Damit ergibt sich:

$$\mathfrak{S} = (a_v + A \mathfrak{R}) (x - x_0) + a_v y + b (T - T_0)$$
$$= a_p (x - x_0) + a_v y + b (T - T_0)$$

und mit $\frac{a_p}{a_v} = \varkappa_0$

$$\mathfrak{S} = a_p \left(x - x_0 + \frac{y}{\varkappa_0}\right) + b (T - T_0).$$

Zieht man durch den Zustandspunkt A, Abb. 4, eine gerade Linie in der Richtung $\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{a_p}{a_v} = \varkappa_0$, so ist im Dreieck $O A' B$:

$$O\,B = z = O\,A' \frac{\sin \alpha_0}{\sin\left(\alpha_0 - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{x - x_0 + \frac{y}{\varkappa_0}}{\left(1 - \frac{1}{\varkappa_0}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

und demnach:

$$\mathfrak{S} = a_p \frac{\varkappa_0 - 1}{\varkappa_0 \sqrt{2}} z + b\,(T - T_0) = \frac{A\,\mathfrak{R}}{\sqrt{2}}\left[z + \frac{b\sqrt{2}}{A\,\mathfrak{R}}(T - T_0)\right].$$

Es liegen also alle Nullpunkte der in der Richtung der Geraden gleicher Temperatur zu messenden Entropiewerte auf einer durch diese Gleichung gegebenen krummen Linie $O\,S$, die leicht zu verzeichnen ist. Man trage von O, dem Temperaturnullpunkt

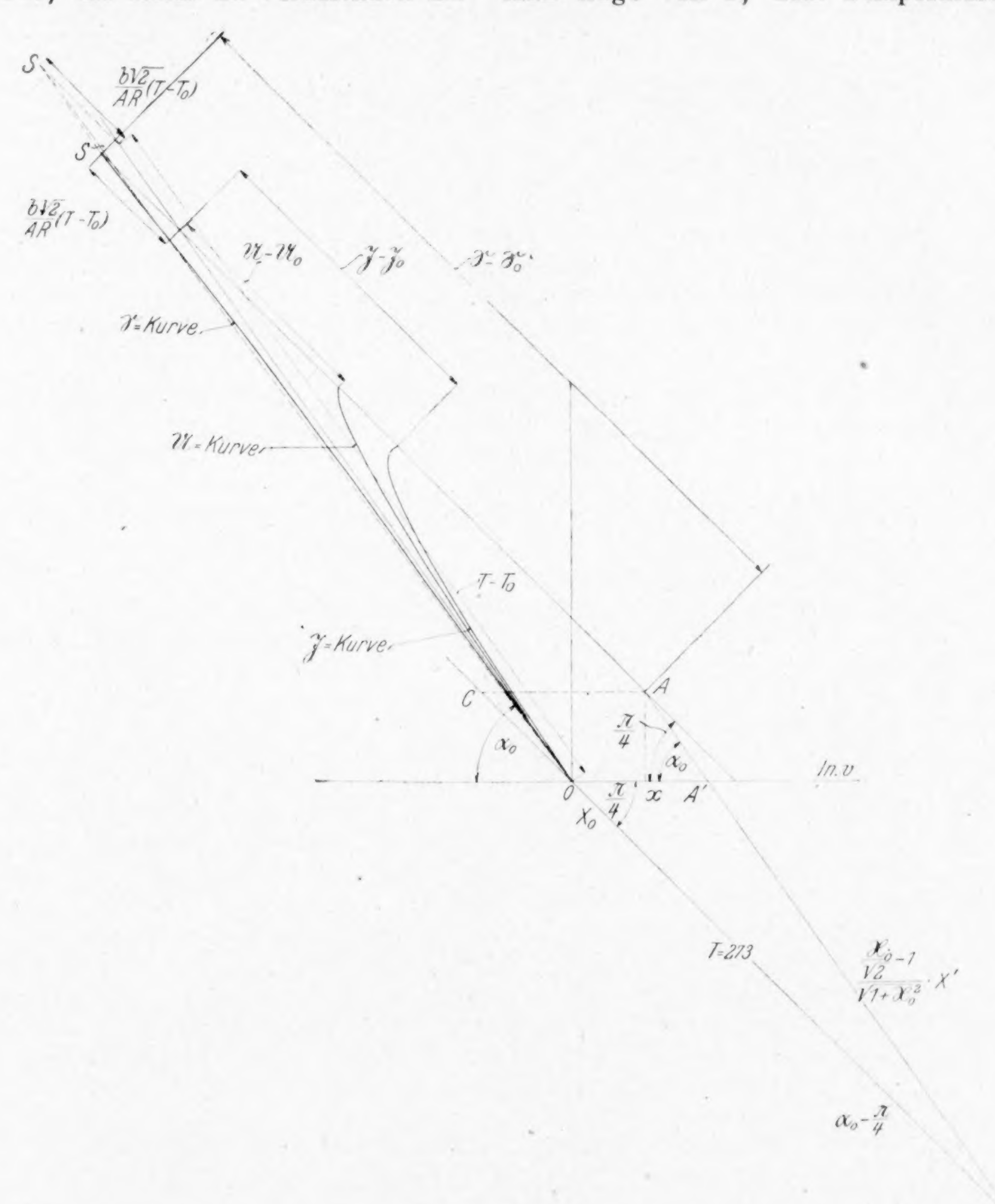


Abb. 4

für T_0, aus im Neigungswinkel α_0 die Gerade $O\,S'$ ein. Auf dieser trage man in beliebigem Maßstab die Temperatur $T_1 - T_0$ und von da z. B. in der Richtung gleicher Temperatur, also unter 135^0 gegen die x-Achse, die Strecke $\frac{b\sqrt{2}}{A\,\mathfrak{R}}(T_1 - T_0)$ ab. Von deren Endpunkt ziehe man die gerade Verbindungslinie mit O, die die zu beliebigen Werten $(T - T_0)$ gehörigen Strecken $\frac{b\sqrt{2}}{A\,\mathfrak{R}}(T - T_0)$ darstellt, die nur mehr auf die zugehörigen

Temperaturlinien des logarithmischen Bildes zu projizieren sind, wodurch sich die Punkte der Nullinie der Entropie OS ergibt.

Hiernach ist der Wert der Entropie in irgend einem Zustandspunkt durch seine in der Richtung von 135° gegen die x-Achse und im Maßstab $\frac{A\,\mathfrak{R}}{\sqrt{2}}$ gemessene Entfernung von der eben beschriebenen Nullinie gegeben. Adiabaten erhält man durch Parallelverschiebung derselben in der Richtung gleicher Temperaturen, an jeder Stelle ist die Tangente an die Nullinie oder Adiabate $\operatorname{tg} \alpha = \varkappa = \frac{c_p + b\,T}{a_v + b\,T}$, wie leicht nachzuweisen ist.

Wie Stodola angegeben hat, kann man auch die zugeführten Wärmemengen abhängig von der Temperatur in einer Linie verzeichnen, um rasch für jede gegebene Wärmezufuhr die bei gleichbleibendem Volumen oder Druck entwickelte Temperatur zu finden.

Für je ein Mol ist die Zunahme der inneren Energie:

$$\mathfrak{U} - \mathfrak{U}_0 = \int_{T_0}^{T} (a_v + b\,T)\,d\,T = a_v\,(T - T_0) + \frac{b}{2}\,(T^2 - T_0^2).$$

Verzeichnet man diese Parabel für die früher vorübergehend verwendeten Abszissen $T - T_0$ und projiziert wieder ihre Punkte auf die zugehörigen Temperaturlinien des logarithmischen Schaubildes, so ergibt sich die $\mathfrak{Q}_v$-Linie, aus der unmittelbar an jeder Stelle durch die Wärmezufuhr auch die Temperaturerhöhung für gleichbleibendes Volumen zu finden ist.

Ebenso kann man den Wärmeinhalt bei gleichbleibendem Druck in einer ähnlichen Linie darstellen. Für die $\mathfrak{Q}_p$-Linie gilt:

$$\mathfrak{J} - \mathfrak{J}_0 = \int_{T_0}^{T} (a_p + b\,T)\,d\,T = a_p\,(T - T_0) + \frac{b}{2}\,(T^2 - T_0^2) = \mathfrak{U} - \mathfrak{U}_0 + A\,\mathfrak{R}\,(T - T_0).$$

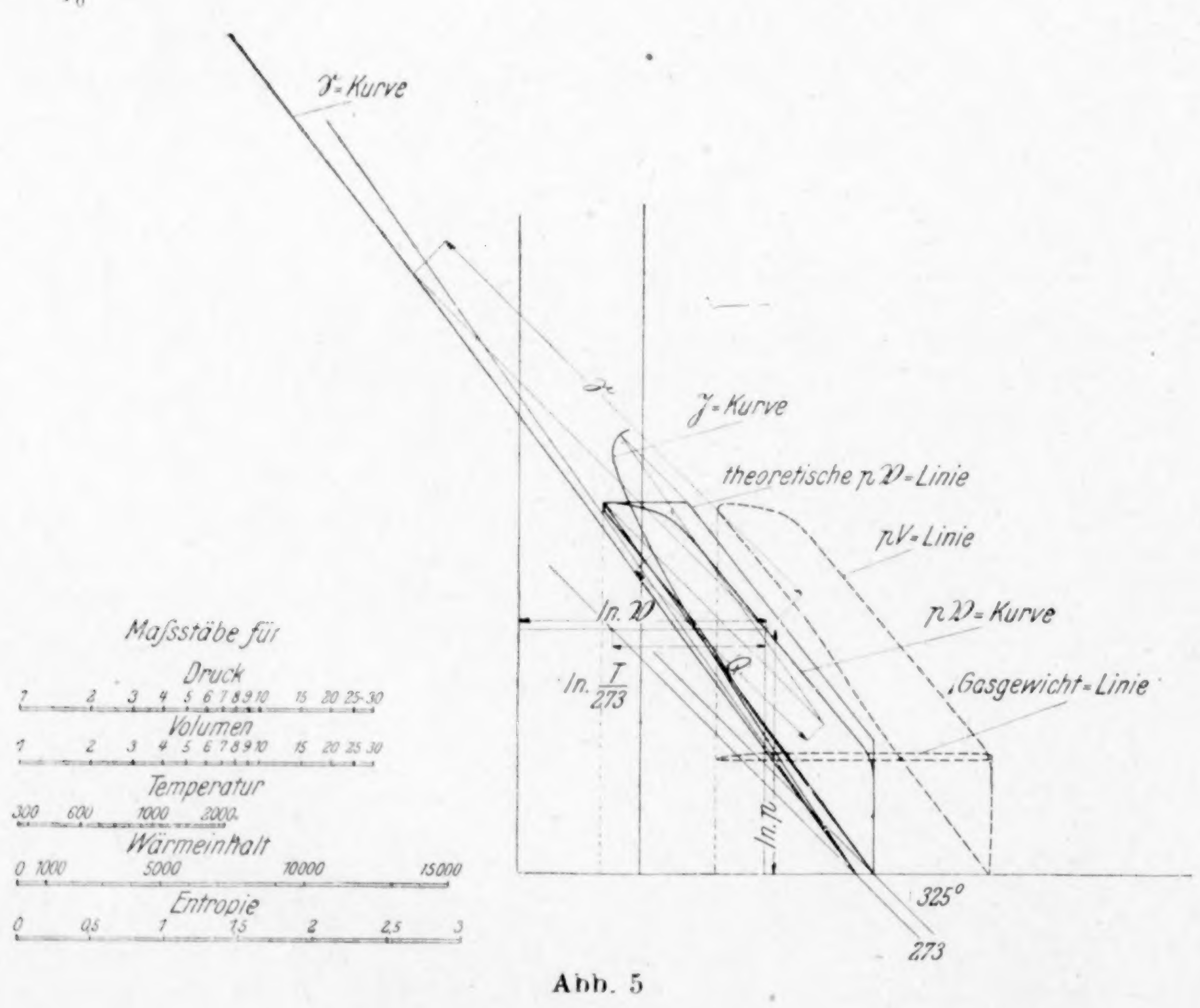


Abb. 5

Mit diesen einfachen Hilfsmitteln sind in Abb. 5 das theoretische und wirkliche logarithmische Druckvolumenbild eines Dieselmotors dargestellt, aus denen auch Temperatur und Entropie für jeden Punkt unmittelbar abgelesen werden können. 31

Über einige besondere Verwendungsarten der Rechenmaschine.

(Zweite Mitteilung.)

Von L. SCHRUTKA in Brünn.[1]

Im 61. Band der Zeitschrift für Mathematik und Physik, S. 320 bis 325, habe ich auf einige Fälle aufmerksam gemacht, in denen die Rechenmaschine bei Rechnungen mit kleinen Zahlen vorteilhaft verwendet werden kann. An diese Abhandlung anknüpfend, will ich hier noch einige ähnliche Bemerkungen vorbringen. Bei einigen davon handelt es sich um die Ausnützung von Stellen der Maschine, die bei der Rechnung sonst unbenützt blieben, bei andern um eine Art Mechanisierung gewisser Folgen von Rechenoperationen.

1. Ausnützung der Maschine bei Multiplikationen von Faktoren ungleicher Stellenzahl. Eine n-stellige Rechenmaschine hat der Regel nach je n Stellen im Schaltwerk und im Nebenzählwerk (Quotienten) und $2n$ Stellen im Hauptzählwerk. Sie reicht also für alle Multiplikationen je zweier n-stelliger Zahlen aus. In der praktischen Ausführung haben aber Schaltwerk oder Nebenzählwerk oder sogar beide oft eine, ja sogar noch mehr Ueberstellen. Es haben also z. B. manche 6stelligen Maschinen 6 Stellen im Schaltwerk, 7 im Nebenzählwerk und 12 im Hauptzählwerk, eine solche Maschine ist für Multiplikationen bis $999\,999 \cdot 999\,999$ und bis $99\,999 \cdot 9\,999\,999$ geeignet.

Haben Multiplikator oder Multiplikand oder beide mehr Stellen, so müssen sie zerlegt und die Teilprodukte (mit Beachtung des Stellenwerts) zusammengefügt werden. Dabei kann aber, wenn das Produkt nicht mehr Stellen als das Hauptzählwerk aufweist, auch die Addition der Teilprodukte noch von der Maschine besorgt werden. Es sei z. B. mit einer Maschine, wie die eben genannte, das Produkt $798 \cdot 543\,902\,712$, das zwölf Stellen hat, zu rechnen. Man stelle im Schaltwerk 000798 ein, multipliziere mit 3902712, Ergebnis: 003114364176, und da jetzt 54 im Nebenzählwerk nicht mehr Platz hat, so bringe man 079800 ins Schaltwerk, lösche das Nebenzählwerk, aber nicht das Hauptzählwerk, aus und multipliziere jetzt mit 5400000; man erhält als Gesamtprodukt 434034364176, oder man könnte auch wie früher beginnen und dann 798000 ins Schaltwerk bringen und mit 0540000 multiplizieren. Es kann Fälle geben, wo sich der eine oder der andre Vorgang dadurch empfiehlt, daß die Umstellungen im Schaltwerk besonders bequem ausfallen; man würde z. B. 000726 lieber auf 072600 als auf 726000 umschalten.

Anwendung auf die Division. Ein ganz ähnlicher Vorgang kann eingehalten werden, um eine zwölfstellige Zahl durch eine Zahl mit weniger als sechs Stellen zu dividieren. Will man z. B. $^1/_{17}$ auf zwölf Dezimalstellen berechnen, so lasse man im Hauptzählwerk lauter Nullen und denke sich 1 an der dreizehnten Stelle dazu, bringe 170000 ins Schaltwerk und dividiere; dies gibt im Nebenzählwerk 5882352 als Quotienten und im Hauptzählwerk 000000160000 als Rest; nun lösche man im Nebenzählwerk aus, bringe 000017 ins Schaltwerk und dividiere weiter; dies gibt 9411 und wegen des Restes 13 ist die letzte Stelle zu erhöhen, es ist also

$$^1/_{17} = 0{,}058\,823\,529\,412.$$

2. Ein Hilfsmittel bei der Verwendung negativer Ziffern. Bekanntlich bedient man sich beim Rechnen mit der Maschine, um die Zahl der Kurbeldrehungen zu vermindern, der negativen Ziffern $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$, $\bar{4}$, $\bar{5}$; man multipliziert z. B. statt mit 89 mit $1\bar{1}\bar{1} = 100 - 10 - 1$, so daß man statt der $8 + 9 = 17$ nur $1 + 1 + 1 = 3$ Kurbeldrehungen braucht. Hierbei erscheint aber im Nebenzählwerk etwa nicht 89, sondern $1\bar{1}\bar{1}$ (die negativen Ziffern sind gewöhnlich durch eine andre Farbe, z. B. rot, kenntlich

[1] Die vorliegende Abhandlung wurde im Jahre 1918 verfaßt und von der Zeitschrift für Mathematik und Physik zur Veröffentlichung angenommen, gelangte aber wegen Einstellung der Zeitschrift dort nicht mehr zum Abdruck. Die erste Mitteilung ist in Bd. 61 (1913) der Zeitschr. f. Math. u. Phys. S. 320—325 erschienen.

gemacht), ausgenommen den heute noch recht seltenen Fall, daß das Nebenzählwerk eine Zehnerübertragung hat[1]).

Man kann diesem Uebelstand ausweichen, indem man, wenn im Schaltwerk noch Platz ist, an einer genügend weit entfernten Stelle 1 einstellt, dann bildet sich die Zahl trotz der Verwendung negativer Ziffern an den entsprechenden Stellen des Hauptzählwerks in der gewöhnlichen Schreibweise.

Multiplikation. Um z. B. 236 mit 287 zu multiplizieren, stelle man im Schaltwerk 100236 ein und kurble so, daß im Nebenzählwerk $3\bar{1}\bar{3}$ erscheint, dann hat man im Hauptzählwerk 000028767732; das Produkt ist also 267732, und 287 dient zur Kontrolle, oder man kann auch bloß auf die fünfte, sechste und siebente Stelle des Schaltwerks schauen und dort durch Kurbeln 287 herstellen.

Man könnte ebenso gut 236001 im Schaltwerk einstellen und würde dann 0000'67732'287 im Hauptzählwerk bekommen.

Division. Um z. B. 64762 durch 138 zu dividieren, stelle man 000000064762 ins Hauptzählwerk, 100138 ins Schaltwerk und dividiere so, daß die Reste, absolut genommen, möglichst klein werden, man erhält im Nebenzählwerk 531 und im Hauptzählwerk 9999'531'00040; hiervon ist 40 der Rest und 531 die dekadische Ergänzung des Quotienten, dieser selbst also 469. Man könnte auch mit 000100065762 im Hauptzählwerk beginnen und würde 0000'531'00040 als Ergebnis bekommen.

Bei diesem Divisionsverfahren werden allerdings die negativen Ziffern nicht vermieden, sondern nur ihre Mischung mit positiven. Man könnte sie ganz umgehen, wenn man umgekehrt dem Dividenden durch Vielfache des Divisors möglichst nahe zu kommen versucht. Man hätte im Hauptzählwerk 0 und im Schaltwerk 100138 einzustellen und würde nach Multiplikation mit $5\bar{3}\bar{1}$ im Hauptzählwerk 0000'469'64722 finden, woraus man als Quotient 469 und als Rest 64762 − 64722 = 40 abliest.

Hat man genügenden Platz im Schaltwerk, im hier behandelten Beispiel 8 Stellen, so kann man beide Umwege vermeiden, indem man 99900138 ins Schaltwerk bringt und nun wie gewöhnlich dividiert. Die Subtraktion von 999 hat im Hauptzählwerk, wenn man die Nachbarstellen außer acht läßt, dieselbe Wirkung wie eine Addition von 1 und umgekehrt. Hat man daher im Hauptzählwerk 64762 eingestellt und kurbelt $\bar{5}31$ mal, so erscheint im Hauptzählwerk

. . . . 99531'469'00040,

woraus nunmehr der Quotient 469 und der Rest 40 unmittelbar abzulesen sind.

3. Darstellung einer Zahl in einem fremden Zahlensystem. Um eine Zahl, z. B. 45957 in einem fremden Zahlensystem, etwa mit der Grundzahl 7 darzustellen, hat man 45957 durch 7 zu dividieren, den (unvollständigen) Quotienten wieder durch 7 usw., die Reste der Division liefern die Ziffern der gesuchten Darstellung und zwar von rechts nach links. Weil also jeder Quotient wieder als Dividend weiter verwendet wird, so rechne man, wie es in Nr. 2 angegeben ist; im angegebenen Beispiel stelle man 0000000'45957 ins Hauptzählwerk, 100007 ins Schaltwerk und dividiere; es ergibt sich 9993435'00002, also der Quotient 6565 (der übrigens nicht abgelesen zu werden braucht) und der Rest 2. Nun lösche man 2 aus (und zwar, da 9993435 stehen zu bleiben hat, nicht mit der Auslöschvorrichtung, sondern durch Umstellen mit der Hand oder durch Subtraktion), stelle im Schaltwerk auf 700001 um und dividiere wieder, aber weil 3435 eine dekadische Ergänzung ist, durch Zuzählen. Man findet im Hauptzählwerk 9999994'00937; also ist der Quotient 937, der Rest 6. Nun ist wieder 6 auszulöschen (wegen der vielen Neuner am bequemsten, indem man 6 im Schaltwerk einstellt und addiert) und die Rechnung in derselben Weise wie zu Anfang weiterzuführen. Der nächste Schritt gibt 9999867'00006, also Quotient 133, Rest 6; der nächste 0000000'00019, also Quotient 19, Rest 0, und den Rest der Rechnung wird man wohl im Kopf ausführen: 19 : 7 = 2, Rest 5; 2 : 7 = 0, Rest 2. Also lautet die Zahl 45957 im Siebenersystem 250662.

Verwandlung einer Zahl aus einem fremden Zahlensystem ins dekadische. Um z. B. die Zahl, die im Siebenersystem 250662 heißt, ins dekadische System

[1]) Meines Wissens existiert eine Zehnerübertragung im Nebenzählwerk nur bei den Mercedes-Euklid-Maschinen.

zurück zu verwandeln, (s. vorhin), kann man folgendermaßen rechnen. Man stelle 2 ins Schaltwerk, addiere sechsmal, erhöhe dann im Schaltwerk auf $2 + 5 = 7$, addiere noch einmal und bringe jetzt die im Hauptzählwerk entstandene Zahl 19 ins Schaltwerk, subtrahiere sie und wiederhole nun das Spiel: man addiere sechsmal 19 und einmal $19 + 0 = 19$, bringe wieder die im Hauptzählwerk entstandene Zahl 133 ins Schaltwerk usw.

Natürlich kann man das Verfahren abkürzen, indem man gar nicht abzieht, sondern 19 und die folgenden Zwischenergebnisse eben nur fünfmal addiert. Man kann aber auch nach jedem Schritt das Hauptzählwerk um eine Stelle verlegen und hat dann eine gewisse Kontrolle darin, daß im Nebenzählwerk eine Reihe von Sechsern und ein Siebener erschienen ist.

4. Verpflanzung einer Zahl von einem Werk ins andre. Braucht man eine Zahl, die im Schaltwerk steht, für die weitere Rechnung im Hauptzählwerk, so wird sie jedermann durch eine Kurbeldrehung hineinbringen, vorausgesetzt nur, daß das Hauptzählwerk soweit verlegt werden kann, als es für diese Operation erforderlich ist.

Braucht man dagegen eine Zahl, die im Hauptzählwerk steht, für die weitere Rechnung im Schaltwerk, so fehlt leider ein so einfaches Verfahren. Hier ist es aber zweckmäßig, die Zahl ins Schaltwerk zu bringen und das Hauptzählwerk nicht durch Auslöschen, sondern durch die einmalige Subtraktion auf Null zu bringen. Erstens wird das Einstellen erleichtert, wenn man die Zahl noch vor Augen hat, zweitens aber hat man gleich eine Kontrolle für die Richtigkeit der Einstellung.

Die in Nr. 2 besprochene Rechenweise kann als Verpflanzung einer Zahl aus dem Nebenzählwerk ins Hauptzählwerk angesehen werden.

5. Teilbarkeitsproben. Zur Feststellung, ob eine Zahl durch 7 teilbar ist, dient folgende bekannte Regel[1]): Eine Zahl ist dann und nur dann durch 7 teilbar, wenn es die Zahl ist, die aus ihr entsteht, indem man die Einerziffer abstreicht und von der übrigbleibenden Zahl (der Anzahl der Zehner) zweimal abzieht. Man wird das Verfahren solange fortsetzen, bis man die Teilbarkeit unmittelbar beurteilen kann, also in der Regel bis zu einer zweistelligen Zahl.

Die Rechnung kann bequem mit der Maschine geführt werden. Es sei z. B. die Zahl 18534 zu prüfen. Man stelle sie im Hauptzählwerk ein, bringe 4 ins Schaltwerk, subtrahiere einmal, verlege dann das Hauptzählwerk um eine Stelle nach rechts und subtrahiere noch zweimal. Es steht jetzt 1845 im Hauptzählwerk. Nun wiederholt sich das Verfahren: man bringt 5 ins Schaltwerk, subtrahiert einmal, verlegt um eine Stelle und subtrahiert noch zweimal, man bekommt so 174 und nach einer weiteren Wiederholung 9. Die Zahl 18534 ist also nicht durch 7 teilbar. Eine Kontrolle der Rechnung ist, daß nach jedem Schritte eine Zahl $\bar{2}\bar{3}3 \ldots \bar{3}\bar{3}1$ im Nebenzählwerk erscheint.

Die Zahlen 18534, 1845, 174 ... haben bekanntlich nicht dieselben Reste noch den Modul 7. Man kann aber den Rest von 18534 nach dem Modul 7 trotzdem erhalten, wenn man beachtet, daß der Rest nach jedem dritten Schritt mit verändertem Vorzeichen, also nach jedem sechsten Schritt, unverändert wiederkehrt. Die beim dritten Schritt erscheinende Zahl 9 zeigt also an, daß der Rest von 18534 gleich dem von -9, also gleich 5 ist. Oder man verschaffe sich eine (zweistellige) Zahl nach dem sechsten Schritte, indem man statt 18534 die Zahl $70\,000\,000 + 18\,534 = 70\,018\,534$ untersucht. Man findet 61, also wieder den Rest 5.

Aehnliche Proben gibt es auch für andre Moduln[2]). Z. B. ist eine Zahl dann und nur dann durch 19 teilbar, wenn es die Zahl ist, die aus ihr entsteht, wenn man die Einerziffer abstreicht und zu der übrigbleibenden Zahl zweimal addiert. Man kann dies ganz ähnlich mit der Maschine durchführen; es werden diesmal im Nebenzählwerk stets Zahlen $211 \ldots 11\bar{1}$ entstehen. Hier kehren die Reste erst nach dem neunten Schritt mit verändertem Vorzeichen, nach dem achtzehnten unverändert wieder.

6. Aufstellung eines Indexsystems für einen Kongruenzmodul. Die Darstellung der zu einem Modul teilerfremden Zahlen als Potenzen einer Primitivzahl (Benennung nach Hilbert, Theorie der algebraischen Zahlkörper, § 9, sonst meist pri-

[1]) s. z B. Zerlang, Zeitschrift für math. und naturw. Unterricht, 2. Bd. (1871) S. 337.

[2]) s. z. B. S. Dickstein, Zeitschrift für math. und naturw. Unterricht, 4. Bd. (1873) S. 404 bis 406; Masing, ebenda, S. 407 bis 411; weitere Nachweise bei P. Bachmann, Niedere Zahlentheorie I, Leipzig 1902, S. 73.

mitive Kongruenzwurzel genannt) kann (in den Fällen, in denen sie überhaugt möglich ist, s. z. B. Gauß, Disquisitiones, Art. 57, 89, 91, 92; Dirichlet-Dedekind, Zahlentheorie §§ 30, 127—131) durch Aufstellung der Dezimalbrüche, die durch Entwicklung aller echten Brüche mit dem Modul als Nenner entstehen, gefunden werden. Es möge das Beispiel des Moduls 41 behandelt werden, ein Eingehen auf nähere Begründung ist wohl überflüssig.

Man rechne: $^1/_{41} = 0,\dot{0}243\dot{9}$, die Perioden der Brüche $^2/_{41}$, $^3/_{41}$ usw. sind also die Vielfachen von 02 439 bis zum 41-fachen, welches 99 999 beträgt. Man berechne diese Vielfaches mit der Maschine (hierbei kann man, wie in Nr. 2 angegeben, die Multiplikatoren ersichtlich machen, indem man im Schaltwerk 102 439 einstellt und im Zählwerk zwischen der fünften und der sechsten Stelle von rechts ein Trennungszeichen anbringt) und verzeichne neben 02 439 die Zähler der Brüche, die abgesehen von zyklischer Vertauschung dieselbe Periode liefern; es sind dies

$$^1/_{41} = 0,\dot{0}243\dot{9},\quad ^{10}/_{41} = 0,\dot{2}439\dot{0},\quad ^{16}/_{41} = 0,\dot{3}902\dot{4},\quad ^{18}/_{41} = 0,\dot{4}392\dot{0},\quad ^{37}/_{41} = 0,\dot{9}024\dot{3}.$$

Man ordne diese Zähler so, wie die Perioden bei fortgesetzter zyklischer Vertauschung aufeinander folgen, also hier 1, 10, 18, 16, 37.

Für jede andere Ziffernfolge bestimme man eine ebensolche Zeile, bis alle Zähler eingetragen sind. Dies gibt hier, da die Periodenlänge 5 ist, $\frac{41-1}{5} = 8$ Zeilen, die mit römischen Ziffern bezeichnet werden mögen. (Für Moduln, die 10 selbst zur Primitivzahl haben, erhielte man eine einzige Zeile.)

Man findet:

I	02 439	1	10	18	16	37
II	04 878	2	20	36	32	33
III	07 317	3	30	13	7	29
IV	09 756	4	40	31	23	25
V	12 195	5	9	8	39	21
VI	14 634	6	19	26	14	17
VII	26 829	11	28	34	12	38
VIII	36 585	15	27	24	35	22

Diese acht Zeilen bilden für die Multiplikation eine zyklische Gruppe, I ist das Einheitselement. Um ein primitives Element zu finden, bilde man etwa die Potenzen von 2: 2 steht in II, 4 in IV, 8 in V, 16 in I, also ist II nicht primitiv, wohl aber III, VI, VII, VIII. Diese vier Zeilen enthalten daher alle $\varphi(40) = 16$ Primitivzahlen. Man versuche etwa 3:

$$3,\ 9,\ 27,\ 81 \equiv -1 \equiv 40,\ -3 \equiv 38,\ -9 \equiv 32,\ -27 \equiv 14,\ 42 \equiv 1.$$

3, 27, 38, 14 sind also keine Primitivzahlen, wohl aber alle andern 16 Zahlen in den vier Zeilen. Man wähle eine davon, etwa 7, als Basis; die ersten Potenzen sind:

	$7,\ 49 \equiv 8,$	$56 \equiv 15,$	$105 \equiv 23,$	$161 \equiv -3 \equiv 38,$	$-21 \equiv 20,$	$140 \equiv 17,$	
Zeile III	V	VIII	IV	VII	II	VI	
				$119 \equiv -4 \equiv 37,$		$-28 \equiv 13.$	
				I		III	

Man setze daher diese Zeilen so untereinander, wie sie hier aufeinanderfolgen und ordne sie so um, wie durch den Anfang 7, 13 gefordert wird, d. h. also mit Umkehrung der Reihenfolge.

III	7	13	30	3	29
V	8	9	5	21	39
VIII	15	22	35	24	27
IV	23	31	40	4	25
VII	38	12	34	28	11
II	20	2	33	32	36
VI	17	14	26	19	6
I	37	16	18	10	1

Man hat hier bereits eine Indextafel, geordnet nach den Werten 1 bis 40 des Index zur Basis 7.

Ist die Periode zu lang, so muß man zwar die übrigen Perioden durch Zerlegung berechnen, bei der Ausfüllung der Zeilen genügt es dagegen, einige Anfangsziffern im Schaltwerk einzustellen. So hätte man z. B. (vergl. Nr. 2) beim Modul 17: $^1/_{17}$ $= 0,\dot{0}588235294117647\dot{}$ und würde nun etwa die Vielfachen von 05882 bestimmen:

05882, 11764, 17646 usw.

Sie zeigen deutlich genug, wie die Perioden von $^2/_{17}$, $^3/_{17}$ usw. lauten. Man erhält demnach folgende Zusammenstellung:

1	10	15	14	4	6	9	5	16	7	2	3	13	11	8	12

und dies ist schon eine Indextafel für die Basis 10. Uebrigens enthält die zweite Hälfte die Ergänzungen der Zahlen der ersten Hälfte auf 17. 20.

Wien, am 29. Juni 1918.

Über die Korrelationsmethode.

Von **H. GRAVELIUS** in Dresden.

Für eine zunehmende Reihe von Anwendungen der hydrographischen Praxis kommt die aus der Variationsstatistik stammende Korrelationsmethode in Betracht. Sie betrifft, wie bekannt, die Aufgabe, aus einem großen statistischen Material über zusammengehörige Wertepaare zweier Veränderlichen auf den funktionalen Zusammenhang zwischen diesen zu schließen. Auf die Anwendung der Korrelationsmethode in der Meteorologie hat F. Exner vor 10 Jahren, meines Wissens zum ersten Male in Deutschland, in der Meteorologischen Zeitschrift nach einer englischen Quelle aufmerksam gemacht [1]). Seine lediglich als Referat gegebene, auf Herleitung und Beweis nicht eingehende Darstellung beschränkt sich aber auf eine Form des »Korrelationskoeffizienten«, die dessen Wesen nicht erkennen läßt und für die Anwendung keineswegs immer bequem ist. Die Exnersche Quelle scheint, nach meinen fruchtlosen Bemühungen um sie, in Deutschland zurzeit nicht zugänglich zu sein. Ich will deshalb die Theorie der Korrelation, deren rationelle Anwendung mir fördernd erscheint, hier auf dem Wege entwickeln, zu dem mich ein spezielles Problem geführt hat, umsomehr als dabei Gesichtspunkte zur Sprache kommen, die Exner fremd geblieben zu sein scheinen und die ich auch bei anderen, die die Methode anwandten, namentlich in Amerika und Schweden, nicht berührt gefunden habe.

[1]) Einer freundlichen Mitteilung des Herrn Herausgebers entnehme ich, daß bereits 1899 in Deutschland über die Methode geschrieben worden ist (Duncker, die Variationsstatistik, Leipzig 1898). Das Buch ist aber selbst beim Verlag nicht mehr zu erhalten. Es war ein Abdruck aus Archiv für Entwicklungsmechanik Bd. 8, das aber auch nicht aufzutreiben war. Lediglich einer brieflichen Mitteilung entnahm ich, daß sich in dem Dunckerschen Buch die hier gegebene Entwicklung nicht finde.

Exner hat den Korrelationskoeffizienten so definiert. Es seien zwei Reihen von Beobachtungen gegeben X_i ($i = 1, 2, .., n$), Y_i ($i = 1, 2, .., n$). Ihre arithmetischen Mittel seien X_0 und Y_0. Man bilde die Abweichungen

$$x_i = X_i - X_0,\ y_i = Y_i - Y_0,$$

dann ist

$$r = \frac{\Sigma\, x\, y}{\sqrt{\Sigma\, x^2}\ \sqrt{\Sigma\, y^2}}$$

eine zwischen -1 und $+1$ schwankende Zahl; und es ist um so eher ein Zusammenhang (eine Korrelation) zwischen den Erscheinungen X und Y anzunehmen, je größer der absolute Betrag von r ist. Daß r zwischen jenen Grenzen schwankt, ist leicht einzusehen; wie man aber gerade auf diese Form eines Maßes für den Zusammenhang zweier Erscheinungen kommt, wird nicht klar. Es erscheint willkürlich gewählt; und dieser Eindruck wird bestätigt und erhöht durch eine spätere Darlegung Exners, die 1913 erschienen ist (Über die Korrelationsmethode. Jena bei Gustav Fischer). In Wirklichkeit ist aber r gar nichts willkürliches, auch nichts neues, sondern ein ganz alter Bekannter, der sich ganz organisch aus einer sinngemäßen Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate ergibt.

1. Ableitung des „Korrelationskoeffizienten". Hydrographisch-klimatologische Forschungen hatten mich dazu geführt; den Niederschlag in Sachsen durch eine Tabelle mit doppeltem Eingang darzustellen, deren vertikales Argument die Meereshöhe in Stufen von je 50 m und deren horizontales Argument die jährliche Regenmenge in Stufen von je 50 mm ist. Die Tabelle gibt die Anzahl der Stationen, die in der Höhenstufe (X_i, X_{i+1}) eine Regenmenge der Stufe (Y_i, Y_{i+1}) haben.

Es lag nahe, diese Darstellung zur Gewinnung eines Urteils über die Abhängigkeit des Niederschlages von der Meereshöhe zu benutzen. Zu dem Zwecke waren die Mittel der einzelnen Horizontalreihen (d. h. das mittlere Y für eine gegebene Stufe X_i, X_{i+1}) zu bilden. Bei der graphischen Abbildung der Tabelle ergaben die durch diese mittleren Y gegebenen Punkte einen Schwarm, der sich einer Geraden anschloß. Nun wurde die Aufgabe umgekehrt, d. h. es wurden die Mittel der einzelnen Vertikalreihen gebildet (mittleres X zu einer gegebenen Stufe Y_i, Y_{i+1} oder mittlere Meereshöhe einer Regenstufe). Dann ergab sich wieder ein Punktschwarm mit zugeordneter Geraden. Aber beide Geraden fielen nicht zusammen, sondern machten, roh gemessen, einen Winkel von nahezu 10^0.

Mit dieser Beobachtung war der Zugang zur »Korrelationsmethode« von selbst gegeben.

Wir wollen eine Tabelle der angegebenen Art graphisch übertragen. Die Punkte $1, 2, .., n$ auf den Achsen sind die Endpunkte der Stufen. Wir wollen gleich so transformieren, daß wir durch diejenigen Punkte der Achsen, welche den Mittelwerten der ganzen Beobachtungsreihen X und Y entsprechen, Parallelen X_0, Y_0 zu den anfänglichen Achsen ziehen. Werden diese Geraden X_0, Y_0 nun als Achsen genommen, so ist also jeder Punkt der Ebene der Träger eines Paares von Abweichungen x, y; und die in unserer Tabelle eingetragenen Zahlen geben die Häufigkeit des Vorkommens eines solchen Paares x, y an.

Die Methode der kleinsten Quadrate zeigt nun sofort, daß die beiden Geraden, die durch die Punktschwärme der Mittelwerte der Reihen und Kolummen sich legen lassen, durch den Ursprung des gewählten Koordinatensystems gehen, da sowohl Σx wie Σy nach Definition verschwinden. Die Normalgleichungen dieser Geraden sind also

$$\Sigma\, x\, y = b_1\, \Sigma\, y^2,\quad \Sigma\, x\, y = b_2\, \Sigma\, x^2,$$

also

$$b_1 = \frac{\Sigma x y}{\Sigma\, y^2},\quad b_2 = \frac{\Sigma\, x\, y}{\Sigma\, x^2}.$$

Definieren wir noch die Streuungen $\sigma_1{}^2$ und $\sigma_2{}^2$ durch

$$n\,\sigma_1{}^2 = \Sigma\, x^2,\quad n\,\sigma_2{}^2 = \Sigma\, y^2,$$

so ist

$$b_1 = \frac{\Sigma x y}{n\,\sigma_2{}^2},\quad b_2 = \frac{\Sigma\, x\, y}{n\,\sigma_1{}^2}$$

oder auch

$$b_1 = \frac{\Sigma\, x y}{n\,\sigma_1\,\sigma_2}\,\frac{\sigma_1}{\sigma_2},\quad b_2 = \frac{\Sigma\, x y}{n\,\sigma_1\,\sigma_2}\,\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Hier ist nun

$$r = \frac{\Sigma xy}{n\,\sigma_1\,\sigma_2} = \frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2\,\Sigma y^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Man hat also für die beiden Geraden

$$x = r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}y,\; y = r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

und die Größen b_1, b_2 hängen mit r durch

$$r^2 = b_1\,b_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

zusammen. Der Winkel φ der beiden Geraden (3) ist gegeben durch

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{1}{b_1} - b_2}{1 + \frac{b_2}{b_1}} = \frac{1 - r^2}{b_1 + b_2} = \frac{1 - r^2}{r}\,\frac{\sigma_1\,\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \quad \ldots\ldots\ldots (5).$$

Man erkennt also, daß $0 \leq |r| \leq 1$, und daß, wenn r sein Maximum erreicht $\varphi = 0$ wird, also die Geraden (3) zusammenfallen, oder, mit anderen Worten, die Beziehung $x = b_1\,y$ umkehrbar ist. In diesem Falle ist also der Zusammenhang zwischen x und y ein vollkommen fester: es besteht ein mathematisches Gesetz.

Für abnehmende r wächst φ und wird für $r = 0$ zu $\varphi = \frac{\pi}{2}$; die Geraden (3) fallen dann mit den Koordinatenachsen zusammen, es besteht gar kein Zusammenhang zwischen den Erscheinungen X und Y. Die Mittelwerte aller Horizontalreihen liegen dann auf der Ordinatenachse, die Mittelwerte aller Vertikalreihen auf der Abszissenachse. (Es läßt sich dies auch unmittelbar aus der Häufigkeitstheorie nachweisen für von einander unabhängige x, y.)

Die Betrachtungsweise, die eben zur Einführung des Korrelationskoeffizienten führte, stellt insofern einen Fortschritt gegen die älteren Betrachtungen dar, als sie deutlich darauf aufmerksam macht, daß eine empirisch hergeleitete Beziehung nicht ohne weiteres umkehrbar ist —, eine Feststellung, die für die Anwendungen von Bedeutung ist.

Die Korrelationsmethode gibt aber die beiden Seiten einer solchen Beziehung, und gibt in r bezw. dem Winkel φ ein Maß für die Annäherung zwischen ihnen.

2. Der mittlere Fehler der Darstellung. Sind nun x, y durch die Ausgleichung gefunden, so leiten sich aus

$$v_1 = x - b_1\,y$$
$$v_2 = y - b_2\,x$$

die mittleren Fehler s_1, s_2 der Darstellungen x, y nach der Ausgleichung ab.

Man hat

$$n\,s_1^2 = \Sigma v_1^2 = \Sigma x^2 - 2\,b_1\,\Sigma xy + b_1^2\,\Sigma y^2,$$

was nach kurzer Reduktion wird

$$s_1^2 = \sigma_1^2\,(1 - r^2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

und entsprechend

$$s_2^2 = \sigma_2^2\,(1 - r^2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

Da nun ferner

$$b_1 = \frac{\Sigma xy}{\Sigma y^2}$$

war, so ist nach einem bekannten Satz über das letzte Ergebnis bei der Gaußschen Auflösung der Normalgleichungen, der mittlere Fehler von b_1

$$\sigma_{b_1} = \frac{s_1}{\sqrt{\Sigma y^2}} = \frac{s_1}{\sigma_2\sqrt{n}}$$

und entsprechend

$$\sigma_{b_2} = \frac{s_2}{\sigma_1\sqrt{n}}$$

oder

$$\sigma_{b_1} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\,\frac{\sqrt{1 - r^2}}{\sqrt{n}},\quad \sigma_{b_2} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\,\frac{\sqrt{1 - r^2}}{\sqrt{n}} \quad \ldots\ldots\ldots (7).$$

3. Zusammenfassung der Ergebnisse. Wir wollen zur bequemeren Uebersicht bei der praktischen Anwendung die gewonnenen Ergebnisse kurz zusammenstellen und

dabei in Hinblick auf die dann vorzunehmende Erweiterung der Aufgabe die Bezeichnungen etwas ändern.

Die als Beobachtungen zugrunde liegenden Abweichungen seien mit x_1 und x_2 bezeichnet. Wir führen dann ein

$$p_{12} = p_{21} = \frac{\Sigma x_1 x_2}{n}, \quad n \sigma_1^2 = \Sigma x_1^2, \quad n \sigma_2^2 = \Sigma x_2^2,$$

$$r_{12} = r_{21} = \frac{p_{12}}{\sigma_1 \sigma_2}, \quad b_{12} = \frac{p_{12}}{\sigma_2^2}, \quad b_{21} = \frac{p_{21}}{\sigma_1^2},$$

$$b_{12} = r_{12} \frac{\sigma_1}{\sigma_2}, \quad b_{21} = r_{21} \frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \quad r_{12} = \sqrt{b_{12} b_{12}},$$

$$x_1 = b_{12} x_2, \quad x_2 = b_{21} x_1,$$

$$s_1 = \sigma_1 \sqrt{1 - r_{12}^2}, \quad s_2 = \sigma_2 \sqrt{1 - r_{21}^2},$$

$$\sigma_{b_{12}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \frac{\sqrt{1 - r_{12}^4}}{\sqrt{n}}, \quad \sigma_{b_{21}} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \frac{\sqrt{1 - r_{21}^2}}{\sqrt{n}}.$$

Mit diesen Formeln hat man alles beisammen, was zur Darstellung des Zusammenhanges zweier Erscheinungen nötig ist. Es fehlt nur eine Angabe über σ_r, den mittleren Fehler des Korrelationskoeffizienten r. Diese Größe läßt sich aber mit elementaren Betrachtungen nicht erlangen. Wir kommen auf sie in Abschnitt 5 zu sprechen.

Hat man die Beziehungsgleichungen zwischen den Abweichungen x_1 und x_2 erlangt, so läßt sich leicht zu den Erscheinungen selbst übergehen. Denn es ist

$$x_i = X_i - X_i^0,$$

wenn mit X^0 der Mittelwert der betreffenden Beobachtungsreihe bezeichnet wird. Aus

$$x_1 = b_{12} x_2$$

folgt also sofort

$$X_1 - X_1^0 = b_{12} (X_2 - X_2^0)$$

$$X_1 = b_{12} X_2 + (X_1^0 - b_{12} X_2^0).$$

und entsprechend

$$X_2 = b_{21} X_1 + (X_2^0 - b_{21} X_1^0).$$

4. Korrelation „zu Dreien". Wir wenden uns nun der nächsten Hauptaufgabe zu, der Darstellung einer »Korrelation zu Dreien«, um es kurz auszudrücken. Untersuchungen dieser Art haben besondere Wichtigkeit für die angewandte Klimatologie. Die Ernteergebnisse (x_1) hängen immer von wenigstens zwei klimatologischen Elementen z. B. Temperatur (x_2) und Niederschlag (x_3) ab. Analoga aus der Hydrographie (Wasserstandsprognose etc.) liegen auf der Hand.

Wenn also die Erscheinungen X_1, X_2, X_3 untereinander zusammenhängen und x_1, x_2, x_3 wieder die Abweichungen $X_1 - X_1^0$ usw. bedeuten, dann bestehen zunächst die drei Beziehungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= b_{123} x_2 + b_{132} x_3 \\ x_2 &= b_{213} x_1 + b_{231} x_3 \\ x_3 &= b_{312} x_1 + b_{321} x_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\;)$$

wo das Anordnungsgesetz der Indices klar ist.

Diese Korrelation zu Dreien hat aber zur allgemeinen Voraussetzung, daß auch unter den einzelnen Paaren Beziehung besteht, so daß also noch die Gleichungen bestehen

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= b_{12} x_2 & x_2 &= b_{21} x_1 \\ x_1 &= b_{13} x_3 & x_3 &= b_{31} x_1 \\ x_2 &= b_{23} x_3 & x_3 &= b_{32} x_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9).$$

Die Größen b sind nach der Methode der kleinsten Quadrate zu bestimmen. Die Fehlergleichungen sind

$$\left.\begin{aligned} v_{123} &= x_1 - b_{123} x_2 - b_{132} x_3 \\ v_{213} &= x_2 - b_{213} x_1 - b_{231} x_3 \\ v_{312} &= x_3 - b_{312} x_1 - b_{321} x_2 \\ v_{12} = x_1 - b_{12} x_2 \quad & \quad v_{21} = x_2 - b_{21} x_1 \\ v_{13} = x_1 - b_{13} x_3 \quad & \quad v_{31} = x_3 - b_{31} x_1 \\ v_{23} = x_2 - b_{23} x_3 \quad & \quad v_{32} = x_3 - b_{32} x_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

und somit die Normalgleichungen

$$\left.\begin{array}{llll} \Sigma x_2 v_{123} = 0 & \Sigma x_3 v_{123} = 0 & \Sigma x_2 v_{12} = 0 & \Sigma x_1 v_{21} = 0 \\ \Sigma x_1 v_{213} = 0 & \Sigma x_3 v_{213} = 0 & \Sigma x_3 v_{13} = 0 & \Sigma x_1 v_{31} = 0 \\ \Sigma x_1 v_{312} = 0 & \Sigma x_2 v_{312} = 0 & \Sigma x_3 v_{23} = 0 & \Sigma x_2 v_{32} = 0 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (11),$$

oder allgemein geschrieben

$$\Sigma x_i v_{hik} = 0 \qquad \Sigma x_i v_{hi} = 0 \qquad \Sigma x_k v_{hik} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11a)$$

(der Faktor x hat niemals den ersten Index des Faktors v).

Diese Normalgleichungen wollen wir nun nicht nach der gewöhnlichen Methode explicite aufstellen und auflösen, sondern beachten, daß alle Summen von der Form

$$\Sigma v_{ik} v_{hik} = 0$$

sind, so daß aus der Entwicklung einer solchen Summe unter steter Berücksichtigung der Gleichungen (11) bezw. (11a) sich Relationen für die Größen b_{hik} gewinnen lassen müssen. Die Bestimmung der b_{hi} kann nach früherem als erledigt gelten, wird uns also nicht mehr beschäftigen.

Wir haben nun

$$0 = \Sigma v_{ik} v_{hik} = \Sigma (x_i - b_{ik} x_k)(x_h - b_{hik} x_i - b_{hki} x_k) = \Sigma (x_h v_{ik} - b_{hik} x_i v_{ik}) \quad (a);$$

da aber

$$\Sigma x_k v_{ih} = 0, \quad \Sigma x_k v_{hk} = 0,$$

so kann man in der vorhergehenden Gleichung (a)

$$x_h \text{ durch } v_{hk} = x_h - b_{hk} x_k$$
$$x_i \quad » \quad v_{ik} = x_i - b_{ik} x_k$$

ersetzen, wodurch wird

$$\Sigma v_{ik} v_{hik} = \Sigma v_{ik} v_{hk} - b_{hik} \Sigma v_{ik}^2,$$

also, da die linke Seite Null ist,

$$b_{hik} = \frac{\Sigma v_{ik} v_{hk}}{\Sigma v_{ik}^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

Vertauschung von h und i ändert den Zähler nicht. Wir schreiben also

$$b_{ihk} = \frac{\Sigma v_{ik} v_{hk}}{\Sigma v_{hk}^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12a).$$

Definieren wir

$$n \sigma_{ik}^2 = \Sigma v_{ik}^2, \quad n \sigma_{hk}^2 = \Sigma v_{hk}^2$$

$$\frac{\Sigma v_{ik} v_{hk}}{n} = p_{hik} = p_{ihk} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13),$$

so wird

$$\left.\begin{array}{l} b_{hik} = \dfrac{p_{hik}}{\sigma_{ik}^2} = \dfrac{p_{hik}}{\sigma_{ik}\sigma_{hk}} \dfrac{\sigma_{hk}}{\sigma_{ik}} \\ b_{ihk} = \dfrac{p_{ihk}}{\sigma_{hk}^2} = \dfrac{p_{ihk}}{\sigma_{ik}\sigma_{hk}} \dfrac{\sigma_{ik}}{\sigma_{hk}} \end{array}\right. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Setzt man jetzt

$$r_{hik} = \frac{p_{hik}}{\sigma_{ik}\sigma_{hk}}, \quad r_{ihk} = \frac{p_{ihk}}{\sigma_{ik}\sigma_{hk}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15),$$

wo nach (13)

$$r_{hik} = r_{ihk} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16),$$

so wird

$$b_{hik} = r_{hik} \frac{\sigma_{hk}}{\sigma_{ik}}, \quad b_{ihk} = r_{ihk} \frac{\sigma_{ik}}{\sigma_{hk}}, \quad r_{hik}^2 = b_{hik} b_{ihk} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17).$$

Nun war

$$n \sigma_{ik}^2 = \Sigma v_{ik}^2$$

$$\Sigma v_{ik}^2 = \Sigma (x_i - b_{ik} x_k)(x_i - b_{ik} x_k) = \Sigma x_i (x_i - b_{ik} x_k) = \Sigma x_i^2 - b_{ik} \Sigma x_i x_k,$$

aber

$$\Sigma x_i^2 = n \sigma_i^2 \; \Sigma x_i x_k = n b_{ki} \sigma_i^2;$$

daher ist

$$n \sigma_{ik}^2 = n \sigma_i^2 - n b_{ik} b_{ki} \sigma_i^2,$$

$$\sigma_{ik}^2 = \sigma_i^2 (1 - r_{ik}^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18),$$

und entsprechend

$$\sigma_{ki}^2 = \sigma_k^2 (1 - r_{ik}^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18a).$$

Vorhin hatten wir (Gl. (12))

$$\Sigma v_{hk} v_{ik} = b_{hik} \Sigma v_{ik}^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b).$$

Mit Rücksicht auf Gl. (11a) ist aber

$$\Sigma v_{hk} v_{ik} = \Sigma x_i x_h - b_{hk} \Sigma x_i x_k,$$

wodurch (b) wird

$$p_{ih} - b_{hk}\, p_{ik} = b_{hik}\, \sigma_{ik}^2;$$

aber

$$p_{ih} = b_{hi}\, \sigma_i^2, \quad p_{ik} = b_{ki}\, \sigma_i^2,$$

$$\sigma_{ih}^2 = \sigma_2^2 (1 - r_{ik}^2), \quad r_{ik}^2 = b_{ik}\, b_{ki},$$

also endlich

$$b_{hik} = \frac{b_{hi} - b_{hk}\, b_{ki}}{1 - b_{ik}\, b_{ki}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18).$$

Nun hatten wir gefunden

$$b_{hik} = r_{hik} \frac{\sigma_{hk}}{\sigma_{ik}}$$

$$b_{hk} = r_{hk} \frac{\sigma_h}{\sigma_k}, \quad b_{ki} = r_{ki} \frac{\sigma_k}{\sigma_i}, \quad b_{hi} = r_{hi} \frac{\sigma_h}{\sigma_i},$$

so daß man zunächst aus (18) erhält

$$r_{hik} = \frac{r_{hi} - r_{hk}\, r_{ki}}{1 - r_{ik}^2} \frac{\sigma_h}{\sigma_i} \frac{\sigma_{ik}}{\sigma_{hk}}$$

und wegen

$$\sigma_{ik} = \sigma_i \sqrt{1 - r_{ik}^2}, \quad \sigma_{hk} = \sigma_h \sqrt{1 - r_{hk}^2}$$

endgültig

$$r_{hik} = \frac{r_{hi} - r_{hk}\, r_{ik}}{\sqrt{1 - r_{ik}^2}\ \sqrt{1 - r_{hk}^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19).$$

5. Der mittlere Fehler bei Korrelation „zu Dreien". Es erübrigt nun noch die Darstellung des mittleren Fehlers einer Beobachtung x_h nach der Ausgleichung. Zu dem Zweck betrachten wir

$$\Sigma\, v_{hik}^2 = n\, \sigma_{hik}^2.$$

Unter wiederholter Anwendung der Beziehungen (11a) (Normalgleichungen) erhalten wir

$$\Sigma^2 v_{hik} = \Sigma\, x_h\, v_{hik} = \Sigma\, v_{hi}\, v_{hik} = \Sigma\, x_h\, v_{hi} - b_{hki}\, \Sigma\, x_k\, v_{hi}$$
$$= \Sigma\, x_h\, v_{hi} - b_{hki}\, \Sigma\, v_{hi} (x_{ki} - b_{ki}\, x_i) = \Sigma\, x\, v_{hi} - b_{hki}\, \Sigma\, v_{hi}\, v_{ki} = \Sigma\, v_{hi}^2 - b_{hki}\, \Sigma\, v_{hi}\, v_{ki}.$$

Nun ist aber (Gl. (12))

$$\Sigma\, v_{hi}\, v_{ki} = b_{hki}\, \Sigma\, v_{hi}^2,$$

also
$$\Sigma\, v_{hik}^2 = \Sigma\, v_{hi}^2 - b_{hki}\, b_{khi}\, \Sigma\, v_{hi}^2 = (1 - b_{hki}\, b_{khi})\, \Sigma\, v_{hi}^2 = (1 - r_{hki}^2)\, \Sigma\, v_{hi}^2$$
$$\sigma_{hik}^2 = \sigma_{hi}^2 (1 - r_{hki}^2)$$

oder endlich, wegen

$$\sigma_{hi}^2 = \sigma_h^2 (1 - r_{hi}^3)$$
$$\sigma_{hik}^2 = \sigma_h^2 (1 - r_{hi}^2)(1 - r_{hki}^2) \quad \ldots\ldots \quad (20).$$

Nach Gl. (12) ist der Gewichtsfaktor für b_{hik}

$$\frac{1}{n\, \sigma_{ik}^2} = \frac{1}{n\, \sigma_i^2 (1 - r_{ik}^2)},$$

so daß man erhält

$$\sigma_{b_{hik}} = \frac{\sigma_h}{\sigma_i \sqrt{n}} \frac{\sqrt{(1 - r_{hi}^2)(1 - r_{hki}^2)}}{\sqrt{1 - r_{ik}^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21).$$

Die Darstellung ist absichtlich auf den, soweit ich sehe, zunächst allein für die gewässerkundliche Arbeit in Betracht kommenden Fall von drei Variabeln beschränkt worden. Man sieht aber, wie man auf dem gleichen Wege einer zweckmäßigen Benutzung der Eigenschaften der v zur Verallgemeinerung für beliebig viele Elemente x gelangen kann.

Es möge aber noch eine kurze Notiz angefügt werden, die sich auf den, offenbar nach englischem Vorbild, in den Anwendungen vielfach gegebenen, »wahrscheinlichen Fehler« von r bezieht. Man hat

$$r = \frac{1}{n\, \sigma_1\, \sigma_2} \Sigma\, x\, y.$$

Der mittlere Fehler σ_r läßt sich nun, soweit ich sehe, nur durch eine tiefer gehende und auch viel Raum in Anspruch nehmende fehlertheoretische Untersuchung erhalten. Wenigstens habe ich nur diesen Weg gefunden. Auf seine Wiedergabe in diesem Zusammenhang muß daher wohl verzichtet werden. Vielleicht ist es zulässig, in einem besonderen Aufsatz darauf einzugehen.

Aber es kann auf elementarem Wege wenigstens eine Plausibelmachung des Ausdrucks für σ_r erreicht werden, die freilich ihre Schwächen hat und nicht den Anspruch

erhebt, ein Beweis zu sein. Es mag nämlich r als eine lineare Funktion der x_i mit den Koeffizienten y_i angesehen werden. Dann ist

$$\sigma_r^2 = \frac{1}{n^2 \sigma_1^2 \sigma_2^2} (y_1^2 \sigma_{x_0}^2 + \ldots + y_n^2 \sigma_{x_n}^2).$$

Die σ_x sind aber untereinander gleich und zwar

$$\sigma_x = s_1 = \sigma_1 \sqrt{1 - r^2},$$

der mittlere Fehler eines x nach der Ausgleichung. Also wird

$$\sigma_r^2 = \frac{1}{n^2 \sigma_1^2 \sigma_2^2} s_1^2 \Sigma y^2,$$

wo nun Σy^2 wieder nichts anderes ist als die Summe der Quadrate der Abweichungen y nach der Ausgleichung, d. h.

$$\Sigma y^2 = n s_2^2.$$

Damit

$$\sigma_r^2 = \frac{(1 - r^2)^2}{n},$$

dies ist aber nun tatsächlich der in der Literatur auftretende Wert, denn es wird als »wahrscheinliche Fehler des Korrelationskoeffizienten r« angegeben

$$f = 0{,}676 \frac{1 - r^2}{\sqrt{n}}.$$

Halten wir aber fest, daß das hier gegebene kein Beweis ist, da wir soeben stillschweigend »für einen Augenblick« angenommen, die y seien unabhängig von den x. Es ist übrigens selbstverständlich, daß das gleiche Ergebnis erlangt worden wäre, wenn $\Sigma x y$ als lineare Funktion der y mit den Koeffizienten x aufgefaßt worden wäre.

Ich komme aber hier nur deshalb auf dieses σ_r zu sprechen, weil ihm eine Bedeutung zugesprochen worden ist, die es nicht hat. Es wird von einem Autor zum andern der Grundsatz übernommen, eine Korrelation dürfe als befriedigend festgestellt gelten, wenn

$$r : f = 6$$

sei. In seinem trefflichen Buch über Wetter und Wettervorhersage spricht sich Defant sogar dahin aus, daß ein Verhältnis $r : f = 5$ genüge, »um das Bestehen einer Beziehung zwischen zwei Elementen zu beweisen«.

Eine solche Auffassung von der Bedeutung des Verhältnisses $r : f$ für die Bewertung einer Korrelation erscheint mir mißverständlich. Nicht dieser Quotient, sondern der absolute Wert von r ist maßgebend für die Enge oder Stärke eines Zusammenhanges. Man scheint zu übersehen, daß

$$\frac{\sigma_r}{r} = \frac{1 - r^2}{r \sqrt{n}}$$

noch von n abhängig ist. Der vorhin erwähnte kritische Wert $r : f = 5$ entspricht in runder Zahl dem Verhältnis $\sigma_r : r = 0{,}3$. Legen wir dies zugrunde, so ergeben sich folgende zusammenhängende Werte von n und r

$n =$ 36	100	400
$r =$ 0,445	0,303	0,160.

Man wird nun schwerlich eine Korrelation für $r = 0{,}16$ noch als diskutabel erachten wollen, selbst wenn $\sigma_r : r$ den angeblich beweisenden Wert 0,3 hat. Und die Zahl von 400 Elementenpaaren läßt sich leicht genug erreichen: Denn wir können doch, wenn wir zu neuen Einsichten gelangen wollen, nicht immer an den Monats- und Jahresmitteln kleben bleiben bei der hydrographischen und meteorologischen Forschung, sondern müssen vielmehr die Einzelbeobachtung als Element einführen.

Die Berechnung von σ_r und seine Wiedergabe in der Form von f ist zwar üblich geworden, hat aber wenig schlüssigen Wert. Es ist allein der absolute Betrag von r, auf den es hier ankommt. An den idealen Wert $|r| = 1$ wird man sich bei der Bearbeitung empirischen Materials freilich nicht klammern, aber auch nicht zu weit von ihm abweichen. Man beachte, daß für $r = 0{,}5$ und den günstigen Fall $\sigma_1 = \sigma_2$

$$\text{tg}\ \varphi = 0{,}75 \qquad \varphi = 37^0$$

wird, also eine schon sehr beträchtliche Divergenz der beiden darstellenden Geraden sich ergibt.

ZUSAMMENFASSENDE BERICHTE

Prandtlsche Tragflächen- und Propeller-Theorie.

Von **E. TREFFTZ** in Aachen.

Der Widerstand, den eine Tragfläche bei der Bewegung durch die Luft erfährt, hat eine zweifache Ursache. Der kleinere Teil des Widerstandes rührt unmittelbar von der Zähigkeit der Luft her, indem die über die Oberfläche streichenden Luftteilchen durch »Hautreibung« eine nach rückwärts gerichtete Reibungskraft erzeugen. Der Hauptteil des Widerstandes ist dagegen eigentlich dynamischer Natur; seine Entstehung erklärt sich etwa folgendermaßen: Erfährt die Tragfläche im Luftstrome einen Auftrieb, so besteht auf der Unterseite der Tragfläche ein Ueberdruck, auf der Oberseite ein Unterdruck. Diese Druckdifferenz wird von einer quer zur Flugbahn gerichteten Strömung begleitet, die von der Mitte der Unterseite um die seitlichen Enden der Tragfläche zur Oberseite strömt. Verlassen die Luftteilchen vermöge ihrer Hauptbewegung in der Längsrichtung die Tragfläche über die Hinterkante, so behalten sie die Quer-Strömung bei, und es entsteht zwischen den Teilen, die von der Oberseite und der Unterseite kommen, eine Differenz in der Horizontalgeschwindigkeit, indem die unteren sich nach außen, die oberen nach innen bewegen. Es geht also von der Hinterkante eine »Unstetigkeitsfläche der Geschwindigkeit« im Helmholtzschen Sinne aus. Daß damit ein Widerstand verbunden sein muß, folgt aus dem Energiesatze; denn es muß offenbar Arbeit geleistet werden, um den Luftteilchen, die über die Tragfläche hinweggegangen sind, außer ihrer gleichförmigen Zuströmungsgeschwindigkeit noch diese Zusatzbewegung zu erteilen, die in den Ebenen senkrecht zur Grundströmung erfolgt.

Wir wissen, daß die Theorie der reibungslosen Flüssigkeitsströmungen über die Entstehung einer solchen Trennungsfläche keinen Aufschluß gibt. Ist eine solche aber einmal vorhanden, so reicht die Theorie zur Berechnung des Bewegungsvorganges und der dadurch hervorgerufenen Widerstands- und Auftriebs-Kräfte aus. Diese Berechnung wird von der Prandtlschen Theorie geleistet, deren Grundgedanken und wesentliche Resultate im folgenden dargestellt werden sollen.[1])

1. Grundlagen der Theorie. Um den Zusammenhang zwischen den geometrischen Strömungsverhältnissen, wie sie eben dargelegt wurden, und den auf die Tragfläche ausgeübten Kräften anschaulich zu machen, gehen wir von dem bekannten Falle der ebenen Potentialströmung aus. Wir wissen, daß eine ebene Potentialströmung um eine »beiderseits ins Unendliche laufende Tragfläche nur dann einen Auftrieb erzeugt, wenn wir in die Tragfläche einen Wirbelfaden legen, was mathematisch darauf hinauskommt, daß wir eine Mehrdeutigkeit des Potentials in dem die Tragfläche umgebenden, zweifach zusammenhängenden Raume zulassen. Dieser Wirbelfaden erzeugt eine Zirkulationsströmung, d. h. eine drehende Bewegung der Flüssigkeit um die Tragfläche, die an

[1]) Die in Frage kommende Literatur ist folgende (von Literatur-Hinweisen im einzelnen ist abgesehen):

1. Betz: Die gegenseitige Beeinflussung zweier Tragflächen, Z .f. Fl. u. M. 5, 1914, S. 253.
2. Prandtl: Tragflügeltheorie. Erste Mitteilung. Gött. Nachr. 1918 S. 451.
   Zweite Mitteilung. Ebenda 1919 S. 107.
3. Prandtl: Der induzierte Widerstand von Mehrdeckern. T. B. III, Heft 7 S. 309.
4. Prandtl: Tragflächenauftrieb und Widerstand. Jahrb. d. W. G. L. V, 1920, S. 37.
5. Munk: Isoperimetrische Probleme aus der Theorie des Fluges. Diss. Göttingen, 1918.
6. Betz: Schraubenpropeller mit geringstem Energieverlust. Gött. Nachr. 1919 S. 193.
7. Betz: Beiträge zur Tragflügeltheorie mit besonderer Berücksichtigung des einfachen rechteckigen Flügels. 1919 (Göttinger Dissertation).
8. Trefftz: Zur Prandtlschen Tragflächentheorie. Mathematische Annalen 82, 1921, Heft 3/4.

Hierbei ist zur Abkürzung gesetzt: Gött. Nachr. = Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse. — Z. f. Fl. u. M. = Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt. — T. B. = Technische Berichte der Flugzeugmeisterei. — Jahrb. d. W. G. L. = Jahrbuch der wissensch. Gesellschaft für Luftfahrt.

Die Arbeit von R. Fuchs, diese Zeitschr. 1, 1921, S. 106—115 konnte noch nicht berücksichtigt werden.

der Oberseite der Tragfläche die Geschwindigkeit erhöht, also den Druck erniedrigt, an der Unterseite die Geschwindigkeit vermindert, also den Druck erhöht, wodurch der Auftrieb hervorgerufen wird. Die für den Auftrieb maßgebende »Zirkulationsstärke« des Wirbelfadens wird durch das um die Tragfläche zu nehmende Integral $\Gamma = \int v_s ds$ gemessen, d. h. sie ist gleich dem (überall gleichen) Zuwachs, den das Potential erfährt, wenn man von einem beliebigen Punkte aus zu diesem Punkte zurück um die Tragfläche herumgeht. Die zunächst willkürliche Größe Γ bestimmt sich nach der Kutta-Joukowskischen Theorie aus der Bedingung glatten Abströmens an der Hinterkante (d. h. der Bedingung, daß dort die Geschwindigkeit endlich bleiben soll). Rechnet man den Anstellwinkel α^* von der Lage aus, in der die Tragfläche keinen Auftrieb erfährt, so ergibt sich der Auftrieb auf ein Flügelelement von der Breite dx zu

$$dA = \varrho V \Gamma dx \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1),$$

wo

$$\Gamma = \pi V t \sin \alpha^* \sim \pi V t \alpha^* \quad \ldots \ldots \ldots (2),$$

also

$$dA = \pi \varrho V^2 t \alpha^* dx \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

ist. Darin ist V die Geschwindigkeit der Grundströmung, t eine für das Flügelprofil charakteristische Länge, die bei der ebenen Platte gleich der Tiefe ist und sich auch für normale Flächenprofile nur sehr wenig von der Tiefe unterscheidet. Die Richtung der Auftriebskraft ist stets senkrecht zur Anblaserichtung[1]).

Es fragt sich nun, in welcher Weise diese für die unendlich breite Tragfläche gewonnenen Resultate für die Tragfläche von endlicher Breite nutzbar gemacht werden können. Denken wir uns die unendlich breite Tragfläche an beiden Seiten abgeschnitten, so dürfen wir den in ihr liegenden Wirbelfaden nicht mit abschneiden, da nur geschlossenen oder beiderseits ins Unendliche verlaufenden Wirbelfäden eine physikalische Bedeutung zukommt. Das einfachste wäre nun, anzunehmen, daß der an den Enden austretende Wirbelfaden nach rückwärts abgebogen wird. Für manche Zwecke, z. B. um bei einem Doppeldecker den Einfluß eines Tragdecks auf das andere zu bestimmen, reicht diese Annahme auch aus (Betzsche Formeln). Zur Berechnung des Widerstandes genügt sie aber deswegen nicht, weil ein Wirbelfaden endlicher Stärke in der ihn umgebenden Flüssigkeit eine Strömung von unendlicher Energie erzeugt, so daß sich nach dem Energiesatz ein unendlicher Widerstand ergeben müßte. In Wirklichkeit gehen nicht nur von den Enden, sondern von jedem Punkte der Hinterkante (unendlich schwache) Wirbelfäden nach rückwärts ab. Infolgedessen haben wir nicht mehr eine über die ganze Spannweite konstante Zirkulation, sondern diese (und damit der Auftrieb pro Flächeneinheit) ist in der Mitte am größten, nimmt — geschwächt durch die nach hinten ablaufenden Wirbelfäden — nach den Seiten zu ab und fällt an den Enden auf Null. Die Gesamtheit dieser von der Hinterkante ablaufenden Wirbelfäden ist nun identisch mit der in der Einleitung genannten Unstetigkeitsfläche. In der Tat erzeugen die — von hinten gesehen — auf der linken Seite rechts-, auf der rechten Seite linksdrehenden Wirbelfäden eine Geschwindigkeit, die an der Unterseite nach außen, an der Oberseite nach innen weist, wie es dort beschrieben wurde, Abb. 1. Bezeichnen wir die Zirkulationsstärke des in der Breite ds nach hinten laufenden Wirbelfadens mit $d\Gamma$, Abb. 2, so ist

Abb. 1

Abb. 2

$$d\Gamma = v_o ds - v_u ds \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4),$$

also wenn wir vom linken Ende L aus integrieren, an einer beliebigen Stelle s

$$\Gamma = \int_{(L)}^{s} v_o ds - \int_{(L)}^{s} v_u ds = \varphi_o - \varphi_u \quad \ldots \ldots \ldots (5),$$

wobei Oberseite und Unterseite des Wirbelbandes durch die Indices o und u unterschieden sind, d. h. die Zirkulationsstärke Γ ist gleich dem Sprunge, den das Potential erleidet, wenn man von der Unterseite der Wirbelschicht zur Oberseite übergeht.

[1]) Das Bestehen der Gl. (2) und (3) für beliebige Tragflächenprofile mit scharfer Hinterkante ist zum erstenmal von R. v. Mises nachgewiesen worden: Zeitschr. Flugtechn. u. Motorluftsch. 8, 1917, S. 157—163 und 11, 1920, S. 68—73, 87—89. Kutta hat (1910) das sinus-Gesetz für ebene und Joukowski (1910) für die nach ihm benannten speziellen Querschnittsformen gefunden.

Die exakte Berechnung von Auftrieb und Widerstand würde nun zur Voraussetzung haben, daß wir die Lage oder die Bewegung des Wirbelbandes nach den Helmholtzschen Wirbelsätzen berechnen. Wir wissen, daß jedes Element eines Wirbelfadens in einem beliebigen Raumpunkte eine Geschwindigkeit gewissermaßen erzeugt, die senkrecht steht auf der Ebene durch das Wirbelelement und den Raumpunkt, der Zirkulationsstärke direkt und der Entfernung zwischen Wirbelelement und Raumpunkt umgekehrt proportional ist (Biot-Savartsches Gesetz). Die unbekannte Gleichgewichtslage des Wirbelbandes ist nun durch die Bedingung bestimmt, daß die Mittelwerte der an der Oberseite und Unterseite des Bandes ermittelten Geschwindigkeiten in die Richtung der Wirbellinie fällt. Um den unüberwindlichen mathematischen Schwierigkeiten zu begegnen, die die Ermittlung der Gleichgewichtslage oder der Bewegung des Wirbelbandes auf dieser strengen Grundlage bietet, geht die Prandtlsche Theorie von der Erfahrungstatsache aus, daß wir es bei den Tragflächen zunächst mit den Fällen schwacher Belastung zu tun haben, d. h. mit solchen Strömungsvorgängen, wo die von den Tragflächenenden hervorgerufenen Störungsgeschwindigkeiten relativ klein sind gegen die Geschwindigkeit V der Grundströmung. Der Grundgedanke der Lösung besteht demgemäß darin, daß von der Eigenbewegung der von der Fläche sich loslösenden Wirbelfäden abgesehen wird. Es wird angenommen, daß die Wirbelelemente von der geradlinigen Grundströmung einfach geradlinig nach hinten fortgetragen werden. Damit ist die Lage der Wirbelfäden bekannt und man kann bei gegebener Zirkulationsverteilung das Geschwindigkeitsfeld und damit Auftrieb und Widerstand berechnen.

Auf Grund dieser Annahme können wir uns ein Bild der Strömungsvorgänge machen. Wir legen ein Koordinatensystem so, daß der Koordinatenanfang in die Mitte der Hinterkante fällt und daß die z-Achse in die Richtung der Grundströmung, die y-Achse nach oben und die x-Achse — von hinten gesehen — nach rechts weist. In genügender Entfernung vor der Tragfläche haben wir nur die Grundströmung V. In der Nähe der Tragfläche und hinter ihr überlagert sich über die Grundströmung die von dem Wirbelbande erzeugte Strömung. Da wir annehmen, daß die Wirbelfäden geradlinig nach hinten laufen (also in der z-Richtung), so ist im Unendlichen hinter der Tragfläche die von dem Wirbelbande erzeugte Strömung einfach eine ebene Potentialbewegung in den Ebenen $z =$ konst. senkrecht zur Grundströmung.

2. Tragflächen, die bei gegebenem Auftrieb kleinsten Widerstand haben.

Unsere Annahme, daß die Wirbelfäden von der Hinterkante geradlinig nach rückwärts verlaufen, gestattet uns die Lösung einer wichtigen Aufgabe. Da wir sahen, daß ein Auftrieb stets mit einem Widerstande verbunden ist, erhebt sich die Frage, welches der geringste Widerstand ist, der bei einem gegebenen Auftriebe mindestens eintreten muß. Um diese Frage zu beantworten, wenden wir auf die Strömung, die wir am Ende des letzten Abschnittes beschrieben haben, eine Energie- und eine Impuls-Betrachtung an. Wir grenzen zu diesem Zwecke die Flüssigkeit in sehr großer (unendlicher) Entfernung vor und hinter der Tragfläche durch zwei Ebenen E_1 und E_2 senkrecht zur Grundströmung ab. Nach einer Sekunde sind diese Ebenen um die Strecke V in die Lage E_1' und E_2' vorgerückt, s. Abb. 3, und es berechnen sich Auftrieb und Widerstand aus dem Impuls- und Energie-Gewinn der Flüssigkeit zwischen den beiden Kontrollebenen. Da der Zustand stationär ist, ist der Gesamtgewinn an Impuls und Energie gleich dem Überschuß an Impuls und Energie, den die Flüssigkeit zwischen E_2 und E_2' gegen die Flüssigkeit zwischen E_1 und E_1' hat. Nun ist der von der Grundströmung V herrührende Anteil vorn und hinten der gleiche; es bleibt also nur Impuls und Energie der vom Wirbelband erzeugten Strömung zwischen E_2 und E_2' übrig. Nach dem Impulssatz ist der Auftrieb A gleich der negativen vertikalen Impulskomponente der Wirbelströmung zwischen E_2 und E_2', und nach dem Energiesatz ist die sekundliche Widerstandsleistung $W\,V$ gleich der Energie dieser Strömung.

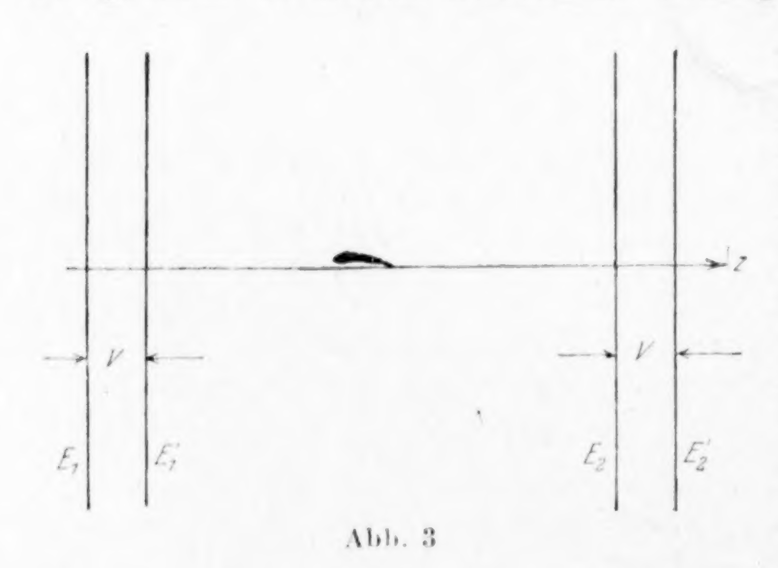


Abb. 3

Es sei $\varphi(x, y)$ das Potential der von dem Wirbelbande in den Ebenen E_2 erzeugten ebenen Potentialströmung, also $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ die Geschwindigkeit der y Richtung, grad φ die Gesamtgeschwindigkeit der xy-Ebene. Dann wird also

$$A = -\varrho \iint \frac{\partial \varphi}{\partial y} V dx dy \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6),$$

$$W V = \frac{\varrho}{2} \iint \operatorname{grad}^2 \varphi \, V dx dy,$$

also

$$W = \frac{\varrho}{2} \iint \operatorname{grad}^2 \varphi \, dx dy \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7),$$

wo $V dx dy$ das Raumelement ist und die Integrale über die xy-Ebene zu erstrecken sind, die wir uns in der üblichen Weise durch den Schnitt des durch die xy-Ebene hindurchtretenden Wirbelbandes begrenzt denken. Führen wir in dem ersten Integrale die Integration nach y aus, so erhalten wir

$$A = \varrho V \int_{(L)}^{(R)} (\varphi_o - \varphi_u) dx \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6'),$$

wo φ_o und φ_u die Potentialwerte am oberen und unteren Rande des Wirbelbandes bezeichnen (das Unendliche trägt nichts bei), und das Integral über den Schnitt des Wirbelbandes von L bis R zu nehmen ist. Nun ist nach Formel (5) die Differenz $\varphi_o - \varphi_u = \Gamma$, also

$$A = \varrho V \int_{(L)}^{(R)} \Gamma dx \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

Um das Integral für W in gleicher Weise umzuformen, benutzen wir die Formel der Vektoranalysis

$$\operatorname{div} \{\varphi \operatorname{grad} \varphi\} = \varphi \operatorname{divgrad} \varphi + \operatorname{grad}^2 \varphi \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9),$$

wo das erste Glied rechts wegfällt, weil divgrad $\varphi = 0$ ist. Wir erhalten

$$\iint \operatorname{grad}^2 \varphi \, dx dy = \iint \operatorname{div} \{\varphi \operatorname{grad} \varphi\} dx dy = \int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} ds \quad \ldots \quad (10),$$

wo das letzte Integral nur noch über die Berandung zu nehmen ist, d. h. da das Unendliche keinen Beitrag liefert um den Schnitt des Wirbelbandes. ν ist dabei die äußere Normale, die an der Oberseite des Bandes nach unten, an der Unterseite nach oben weist. Fassen wir je die zwei Beiträge zusammen, die längs des Längenelementes ds von der Ober- und Unterseite des Wirbelbandes herrühren, indem wir die von oben nach unten weisende Normale mit n bezeichnen, so haben wir oben $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu_0} = \frac{\partial \varphi}{\partial n}$, unten $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu_u} = -\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ zu setzen, wobei wir benutzen, daß die Normalkomponente der Geschwindigkeit beim Durchtritt durch das Wirbelband stetig bleibt. Es wird somit

$$\int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} ds = \int_{(L)}^{(R)} \frac{\partial \varphi}{\partial n} (\varphi_o - \varphi_u) ds \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11),$$

d. h.

$$W = {}^1\!/\!_2 \varrho \int_{(L)}^{(R)} \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12).$$

Fragen wir nun nach dem kleinsten Widerstande, so müssen wir die Variation δW des Widerstandes berechnen, die wir erhalten, wenn wir das Potential φ um $\delta \varphi$ ändern. Es wird

$$\delta W = \varrho \iint \operatorname{grad} \varphi \operatorname{grad} \delta \varphi \, dx dy \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

(grad φ grad $\delta \varphi$ ist das skalare Produkt der Vektoren grad φ und grad $\delta \varphi$) und mit der gleichen Umformung wie oben

$$\delta W = \varrho \int_{(L)}^{(R)} \delta \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14);$$

ferner die Variation des Auftriebes

$$\delta A = \varrho V \int_{(L)}^{(R)} \delta \Gamma \, dx = \varrho V \int_{(L)}^{(R)} \delta \Gamma x' \, ds \quad \ldots \ldots \ldots (15).$$

Soll W bei gegebenem A ein Minimum werden, so muß für irgend ein $\delta \Gamma$

$$\delta W - \lambda \delta A = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (16)$$

sein, also

$$\varrho \int_{(L)}^{(R)} \delta \Gamma \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \delta V \frac{dx}{ds} \right) ds = 0,$$

was bei beliebigem $\delta \Gamma$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \lambda V \frac{dx}{ds} \text{ oder } (\lambda V = c \text{ gesetzt}) \; \frac{\partial \varphi}{\partial n} = c \frac{dx}{ds} \quad \ldots \ldots (17)$$

erfordert. $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ ist die Normalkomponente der Geschwindigkeit an der Wirbelfläche. Bezeichnen wir sie mit w_n, so ist

$$w_n = c \frac{dx}{ds} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (18)$$

gerade die von Munk angegebene Minimalbedingung. Für den Fall, daß die Hinterkante geradlinig ist, können wir die dieser Bedingung genügende Potentialfunktion φ sofort angeben. Führen wir nämlich die zu φ konjugierte Potentialfunktion ψ ein, die durch die Gleichungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (19)$$

definiert ist, so schreibt sich Gl. (17)

$$\frac{\partial \psi}{ds} = c \frac{dx}{ds} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (20)$$

oder integriert

$$\psi = cx \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (21).$$

Bekanntlich ist ψ die Stromfunktion der Potentialströmung, $\varphi + i\psi$ eine analytische Funktion von $x + iy$. Für das ebene Wirbelband wird

$$\varphi + i\psi = ic \{ x + iy - \sqrt{(x+iy)^2 - l^2} \} \quad \ldots \ldots \ldots (22).$$

($l = s/2$ ist die halbe Spannweite.) In der Tat wird am Rande des Wirbelbandes, d. h. für $y = 0$ und $|x| \leq l$ die Wurzel rein imaginär, so daß $\psi = cx$ wird, wie verlangt war. Wir erhalten daraus am Wirbelbande

$$\varphi = \pm c \sqrt{l^2 - x^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (23),$$

wo das positive Vorzeichen an dem oberen, das negative am unteren Rande des Wirbelbandes gilt, also

$$\varphi_o = + c \sqrt{l^2 - x^2}, \quad \varphi_u = - c \sqrt{l^2 - x^2} \text{ und } \Gamma = \varphi_o - \varphi_u = 2c \sqrt{l^2 - x^2} \quad . \quad (24)$$

oder, wenn Γ_m die Zirkulation für $x = 0$ ist,

$$\Gamma = \Gamma_m \sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (24').$$

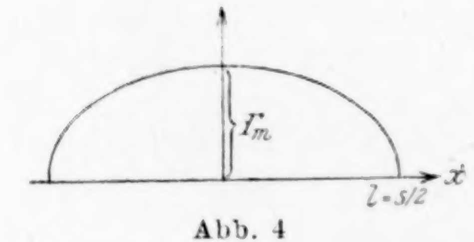


Abb. 4

Abb. 4 gibt die Verteilung der Zirkulation über die Spannweite, die dieser Formel entspricht.

Berechnen wir aus Gl. (24) Auftrieb und Widerstand nach den Formeln (8) und (12), indem wir beachten, daß $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = c$ ist, so ergibt sich

$$A = \tfrac{1}{4} \pi \varrho s^2 V c \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (25),$$

$$W = \tfrac{1}{8} \pi \varrho s^2 c^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (26)$$

oder, wenn wir c eliminieren,

$$W = \frac{2 A^2}{\pi \varrho V^2 s^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (27).$$

Diese Formel liefert also den gesuchten Mindestwiderstand für den gegebenen Auftrieb A. Trägt man W als Funktion von A auf oder, was dasselbe ist, den Widerstands-

beiwert als Funktion des Auftriebsbeiwertes in einem sogen. Polardiagramm, so erhält man eine Parabel. Abb. 5 gibt ein solches Diagramm mit den experimentell ermittelten Werten zum Vergleich.

Für eine Tragfläche, deren Hinterkante nicht geradlinig ist, d. h. für nicht ebenes Wirbelband, sowie für Mehrdecker, ist die Bedingung (17) für den kleinsten Widerstand die gleiche, aber die Lösung ist nicht mehr so einfach wie in dem eben behandelten Falle. Wichtig ist die anschauliche Deutung, die wir der Gleichung (17) geben können. Bewegt man nämlich die starr zu denkende Wirbelfläche mit der Geschwindigkeit c nach abwärts, so entsteht in der Flüssigkeit (d. h. in der $x\,y$-Ebene) eine Potentialströmung, die, wenn man sie auf ein nicht mitbewegtes Koordinatensystem bezieht, gerade die Bedingung (17) erfüllt. Nun können wir diese Strömung folgendermaßen erzeugen: wir bestimmen zunächst diejenige Bewegung, bei der die Flüssigkeit im Unendlichen eine Geschwindigkeit c nach aufwärts hat und um die ruhende Wirbelfläche herumströmt, wie um ein starres Hindernis; dann überlagern wir eine gleichmäßige Abwärtsgeschwindigkeit c und erhalten so die gesuchte Bewegung. Man erkennt, daß damit die Aufgabe darauf zurückgeführt ist, die Potentialströmung zu finden, welche die starre Wirbelfläche umströmt. Auf Grund dieser Überlegung ist von Grammel der Doppeldecker mit gleicher Spannweite der beiden Tragdecks gerechnet worden.

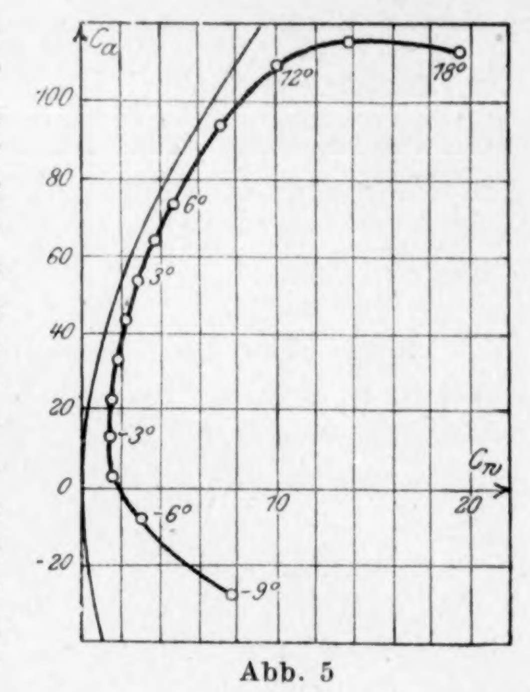


Abb. 5

Aus unserer Betrachtungsweise, die die Minimalaufgabe auf eine Randwertaufgabe für die Potentialströmung im Unendlichen hinter der Tragfläche zurückführt, folgt ohne weiteres ein Satz, der von Prandtl und Munk auch direkt bewiesen worden ist. Haben wir ein Tragwerk, dessen einzelne Tragflächen gegeneinander gestaffelt sind, und fragen nach dem günstigsten Falle, in dem bei gegebenem Auftrieb der Widerstand ein Minimum wird, so folgt, daß dieser Mindestwiderstand unabhängig ist von der Art der Staffelung. In der Tat haben wir bei unserer Betrachtung nichts über die Staffelung oder über die Anzahl der Tragflächen vorausgesetzt, so daß Gl. (17) und die daran geknüpften Folgerungen in jedem Falle bestehen bleiben. Dabei ist zu bemerken, daß bei einer Änderung der Staffelung durch geeignete Veränderung der Tiefe oder der Anstellwinkel der einzelnen Flächenteile dafür zu sorgen ist, daß die Auftriebsverteilung die gleiche — dem günstigsten Falle entsprechende — bleibt.

3. Berechnung von Auftrieb und Widerstand gegebener Tragflächen. Im vorigen Abschnitte haben wir die Frage beantwortet, welches der geringste Widerstand ist, der bei einem gegebenen Auftrieb A notwendig mindestens entsteht. Durch eine Energie- und Impuls-Betrachtung konnten wir hier das Verhältnis von Gesamtauftrieb zu Gesamtwiderstand aus den Strömungsverhältnissen im Unendlichen hinter der Tragfläche gewinnen, ohne daß es notwendig geworden wäre, die Strömungsverhältnisse an der Tragfläche selbst zu untersuchen. Stellen wir uns jetzt die weitergehende Frage, welcher Auftrieb und Widerstand von einer gegebenen Tragfläche erzeugt wird, so sind wir genötigt, auf die Strömungsverhältnisse in der Nähe der Tragfläche näher einzugehen, und zwar machen wir hier eine zweite Hilfsannahme, um praktisch unlösbare mathematische Schwierigkeiten zu umgehen. Da wir es nämlich bei den Tragflächen mit einer im Verhältnis zur Tiefe und Dicke relativ großen Spannweite zu tun haben, so nehmen wir an, daß wir in der unmittelbaren Umgebung der Tragfläche die Strömung so weit als eben (d. h. in den Ebenen $x =$ konst. erfolgend) ansehen können, daß für jeden Streifen von der Breite dx die Auftriebs- und Zirkulations-Formeln

$$dA = \varrho\, V\, \Gamma\, dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\Gamma = \pi\, V\, t\, \alpha^* \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$dA = \pi\, \varrho\, V^2\, t\, \alpha^* \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

die (mit $\sin \alpha^* \sim \alpha^*$) für die unendlich breite Tragfläche aufgestellt waren, in Anwendung kommen können. Die Formel für den Widerstand erhalten wir dann nach Prandtl durch folgende einfache Ueberlegung. Der Auftrieb, den ein Flächenstreifen erfährt, steht senkrecht zu der Richtung, in der der Streifen angeblasen wird, also senkrecht zur

Grundströmung, wenn kein Wirbelband vorhanden ist. Ist aber ein Wirbelband da, so erzeugt es in der Umgebung der Tragfläche eine nach abwärts gerichtete Geschwindigkeit w, die sich zur Grundströmung V geometrisch addiert, so daß die resultierende Geschwindigkeit nicht mehr horizontal, sondern unter einem Winkel

$$\varepsilon = \frac{w}{V} \qquad (28)$$

nach unten geneigt ist, Abb. 6. Auf dieser effektiven Anblaserichtung steht nun auch die auf das Flächenelement wirkende Kraft senkrecht, d. h. der ohne Wirbelband vertikale Auftrieb ist jetzt um den Winkel ε nach hinten gekippt, hat also eine Widerstandskomponente

$$d\,W = \varepsilon\,d\,A \qquad (29).$$

Führen wir die Verringerung des effektiven Anstellwinkels α^* gegen den gemessenen α in die Formel für die Zirkulationsstärke (2)

$$\Gamma = \pi\,V\,t\,(\alpha - \varepsilon) \qquad (30'),$$

ein, so erhalten wir die Gleichung

$$\Gamma = \pi\,V\,t\left(\alpha - \frac{w}{V}\right) \qquad (30),$$

welche die Grundlage der Auftriebs- und Widerstands Berechnung bildet. Drückt man nämlich in dieser Gleichung w durch Γ aus, indem man nach dem Biot-Savartschen Gesetze die von den Wirbelfäden erzeugte Geschwindigkeit bestimmt, so erhält man bei gegebener Tragfläche (d. h. für gegebenes V, t und α) eine Integralgleichung für Γ. Diesen Weg hat Betz in seiner Dissertation eingeschlagen, um die Zirkulationsverteilung zu bestimmen. Wegen der langsamen Konvergenz der dabei benutzten Reihen stellen sich der Verwendung dieser Methode aber erhebliche rechnerische Schwierigkeiten entgegen. Wir kommen zu einem einfacheren Verfahren, wenn wir auch diese Frage auf die Untersuchung der Strömung im Unendlichen hinter der Tragfläche zurückführen. Dazu verhilft uns die folgende Bemerkung: Wenn wir die von der Hinterkante der Tragfläche ausgehenden Wirbelfäden an der Ebene $z = 0$ (Vertikalebene durch die Hinterkante) spiegeln, so werden sämtliche in dieser Ebene liegenden Geschwindigkeitskomponenten, also auch w verdoppelt, denn zu der Wirkung der Wirbelfäden selbst tritt noch die ihr gleiche Wirkung der Spiegelbilder hinzu. Nun haben wir aber nach der Spiegelung ein System von geradlinigen parallelen Wirbelfäden, die sich nach beiden Seiten ins Unendliche erstrecken und die infolgedessen jetzt in allen Ebenen $z =$ konst. die ebene Potentialströmung hervorrufen, welche vor der Spiegelung nur im Unendlichen hinter der Tragfläche herrschte. Es folgt, daß die verdoppelte Abwärtsgeschwindigkeit $2\,w$ gleich der Abwärtsgeschwindigkeit $-\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ im Unendlichen hinter der Tragfläche sein muß. Berücksichtigen wir noch, daß die Zirkulationsstärke Γ gleich der Differenz der Potentialwerte an der Oberseite und Unterseite des Wirbelbandes ist:

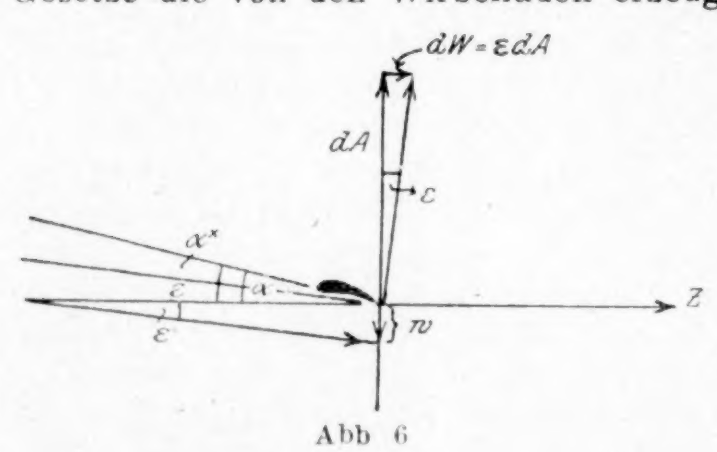


Abb. 6

$$\Gamma = \varphi_o - \varphi_u \qquad (5)$$

und setzen beides in Gl. (30) ein, so ergibt sich für die Bestimmung des Potentials die für die Randwerte am Wirbelbande zu erfüllende Gleichung

$$\varphi_o - \varphi_u = \pi\,V\,t\left(\alpha + {}^1/_2\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) \qquad (31).$$

4. Beispiel: Der rechteckige Flügel mit überall gleichem Profil und gleichem Anstellwinkel. Die Lösung der gemischten Randwertaufgabe für das Potential $\varphi\,(x\,y)$ will ich an dem Beispiel der Tragfläche von rechteckigem Umriß und überall gleichem Anstellwinkel darlegen. Wir haben die Aufgabe, eine Potentialfunktion $\varphi\,(x\,y)$ in der x-y Ebene zu bestimmen, die längs des geradlinigen Schnittes des Wirbelbandes mit der x-y-Ebene einen solchen Sprung erleidet, daß

$$\varphi_o - \varphi_u = \pi\,V\,t\left(\alpha + {}^1/_2\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) \qquad (31)$$

ist, wobei a und t konstant sein sollen. Um die Theorie der komplexen Funktionen verwenden zu können, fassen wir x und y zu der komplexen Variabeln $z = x + i\,y$ zusammen[1]) und betrachten noch die komplexe Funktion $\omega = \varphi + i\,\psi = f(z)$, deren Realteil φ ist. Um dimensionslose Größen zu erhalten, setzen wir

$$\varphi^* = \frac{\varphi}{t\,V\,a},\quad \psi^* = \frac{\psi}{t\,V\,a}\quad x^* = \frac{4\,x}{\pi\,t},\quad y^* = \frac{4\,y}{\pi\,t},\quad s^* = \frac{4\,s}{\pi\,t},\quad l^* = \frac{4\,l}{\pi\,t} = {}^1\!/_2\, s^*$$

(wo $l = \frac{s}{2}$ die halbe Spannweite bedeutet) und entsprechend

$$\omega^* = \frac{\omega}{t\,V\,a},\quad z^* = \frac{4\,z}{\pi\,t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (32),$$

wodurch die Randwertaufgabe die vereinfachte Gestalt

$$\varphi_o^* - \varphi_u^* = \pi + 2\,\frac{\partial \varphi^*}{\partial y^*} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (33)$$

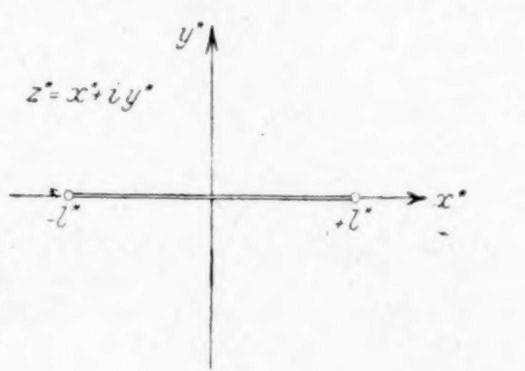
oder, wenn wir berücksichtigen, daß für ein ebenes Wirbelband aus Symmetriegründen $\varphi_o^* = -\,\varphi_u^*$ ist:

$$\varphi_o^* = \frac{\pi}{2} + \frac{\partial \varphi^*}{\partial y^*} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (34).$$

Um diese vereinfachte Randwertaufgabe zu lösen, bilden wir zunächst die z-Ebene durch die **Transformation**

$$\zeta = \frac{z^*}{l^*} + \sqrt{\left(\frac{z^*}{l^*}\right)^2 - 1} \quad \text{oder} \quad \frac{z^*}{l^*} = {}^1\!/_2\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) \quad \ldots\ldots (35)$$

auf eine Hilfsebene $\zeta = \xi + i\,\eta$ ab, Abb. 7.



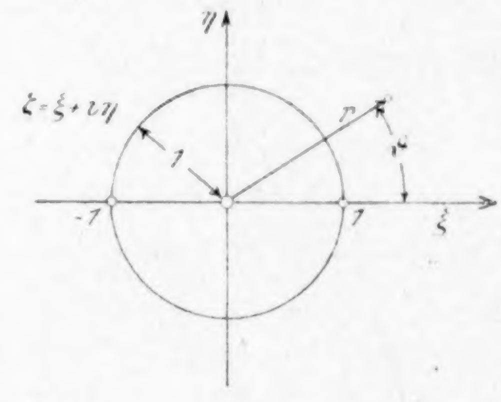


Abb. 7

Bei dieser Transformation geht der Schnitt des Wirbelbandes, d. h. die Strecke, $y^* = 0$, $-\,l^* < x^* < l^*$ in den Einheitskreis der ζ-Ebene über und zwar der obere Rand in den oberen Halbkreis, der untere Rand in den unteren Halbkreis. Rechnen wir die Randwertaufgabe auf die neuen Koordinaten um, so erhalten wir die am Einheitskreise zu erfüllende Gleichung:

$$\varphi_o^* = \frac{\pi}{2} + \frac{\partial \varphi^*}{\partial r}\,\frac{1}{l^*\,\sin\vartheta} \qquad \varphi_u^* = -\,\varphi_o^* \quad \ldots\ldots (36),$$

wobei r und ϑ Polarkoordinaten in der ζ-Ebene sind

$$\xi = r\cos\vartheta,\quad \eta = r\sin\vartheta,\quad \xi + i\,y = r\,e^{i\,\vartheta} \quad \ldots\ldots (37).$$

φ_o^* und φ_u^* bezeichnen jetzt die Potentialwerte an je zwei zur ξ-Achse symmetrisch liegenden Punkten des Einheitskreises. Diese Randwertaufgabe habe ich in der Weise gelöst, daß ich für φ^* eine Entwicklung

$$\varphi^* = a_1\,\frac{\sin\vartheta}{r} + a_3\,\frac{\sin 3\,\vartheta}{r^3} + a_5\,\frac{\sin 5\,\vartheta}{r^5} + a_7\,\frac{\sin 7\,\vartheta}{r^7} \ldots \quad \ldots (38)$$

angesetzt habe. Durch den Fortfall von Cosinus-Gliedern ist die Bedingung $\varphi_u^* = -\,\varphi_o^*$ erreicht, der Fortfall der Glieder mit geradem Index trägt den Symmetrieeigenschaften Rechnung. Die Koeffizienten dieser Entwicklung habe ich in der folgenden Weise bestimmt; die Bedingung (36) sollte eigentlich für jeden Punkt des oberen Halbkreises gelten, d. h. bei $r = 1$ für alle Werte von ϑ. Ich habe die Reihe nach dem 7. Gliede abgebrochen und dann $a_1\ a_3\ a_5\ a_7$ so bestimmt, daß (36), wenn auch nicht für alle ϑ, so doch für

$$\vartheta = 22{,}5^0,\quad 45^0,\quad 67{,}5^0,\quad 90^0$$

und damit aus Symmetriegründen auch für

$$\vartheta = 112{,}5^0,\quad 135^0,\quad 157{,}5^0$$

erfüllt ist. Man erhält auf diese Weise für jedes l^*, d. h. für ein gegebenes Verhältnis von Spannweite zu Tiefe je 4 lineare Gleichungen, aus denen die a numerisch zu rechnen sind.

---

[1]) z ist hier also nicht mehr die dritte Raumkoordinate.

Ich habe für die Verhältnisse von Spannweite zu Tiefe

$$s:t = 2, \quad 4; \quad 10; \quad 20,$$

d. h. für $\quad l^* = 1,27, \quad 2,55, \quad 6,37, \quad 12,74$

die Koeffizienten berechnet und für φ^* die folgenden Entwicklungen gefunden:

$$\left.\begin{array}{ll} s:t = 2 & \varphi^* = 0,965 \frac{\sin\vartheta}{r} + 0,054 \frac{\sin 3\vartheta}{r^3} + 0,007 \frac{\sin 5\vartheta}{r^5} + 0,001 \frac{\sin 7\vartheta}{r^7} \\ 4 & \varphi^* = 1,281 \frac{\sin\vartheta}{r} + 0,120 \frac{\sin 3\vartheta}{r^3} + 0,021 \frac{\sin 5\vartheta}{r^5} + 0,002 \frac{\sin 7\vartheta}{r^7} \\ 10 & \varphi^* = 1,605 \frac{\sin\vartheta}{r} + 0,251 \frac{\sin 3\vartheta}{r^3} + 0,061 \frac{\sin 5\vartheta}{r^5} + 0,012 \frac{\sin 7\vartheta}{r^7} \\ 20 & \varphi^* = 1,761 \frac{\sin\vartheta}{r} + 0,357 \frac{\sin 3\vartheta}{r^3} + 0,108 \frac{\sin 5\vartheta}{r^5} + 0,024 \frac{\sin 7\vartheta}{r^7} \end{array}\right\} \quad . \quad (39),$$

aus denen sich $\Gamma = 2\,\varphi$ berechnet.

Die Resultate sind in Abb. 8 bis 11 dargestellt. Um eine möglichst übersichtliche Darstellung zu gewinnen, bemerken wir das folgende: bezeichnen wir mit Γ_∞ denjenigen konstanten Wert der Zirkulationsstärke

$$\Gamma_\infty = \pi\, V\, t\, \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40),$$

der für die Tragfläche von unendlicher Spannweite gelten würde, so ist (nach Formel (1), (2), (3) und (30)) die Auftriebsdichte

$$\frac{dA}{dx} = \varrho\,\Gamma\,V = \pi\,\varrho\,V^2 t\,\alpha\,\frac{\Gamma}{\Gamma_\infty} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41),$$

die Widerstandsdichte

$$\frac{dW}{dx} = \varrho\,\Gamma\,w = \pi\,\varrho\,V^2\,t\,\alpha^2\,\frac{\Gamma}{\Gamma_\infty}\left(1 - \frac{\Gamma}{\Gamma_\infty}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42).$$

Um nun die Verteilung von Auftrieb und Widerstand über die Spannweite zu veranschaulichen, habe ich die Größen $\frac{\Gamma}{\Gamma_\infty}$ und $\frac{\Gamma}{\Gamma_\infty}\left(1 - \frac{\Gamma}{\Gamma_\infty}\right)$, die, mit $\pi\,\varrho\,V^2\,t\,\alpha$ bezw. $\pi\,\varrho\,V^2\,t\,\alpha^2$ multipliziert, die Auftriebs- und Widerstandsdichte ergeben, für die berechneten Fälle in Abb. 8 und 9 aufgetragen.

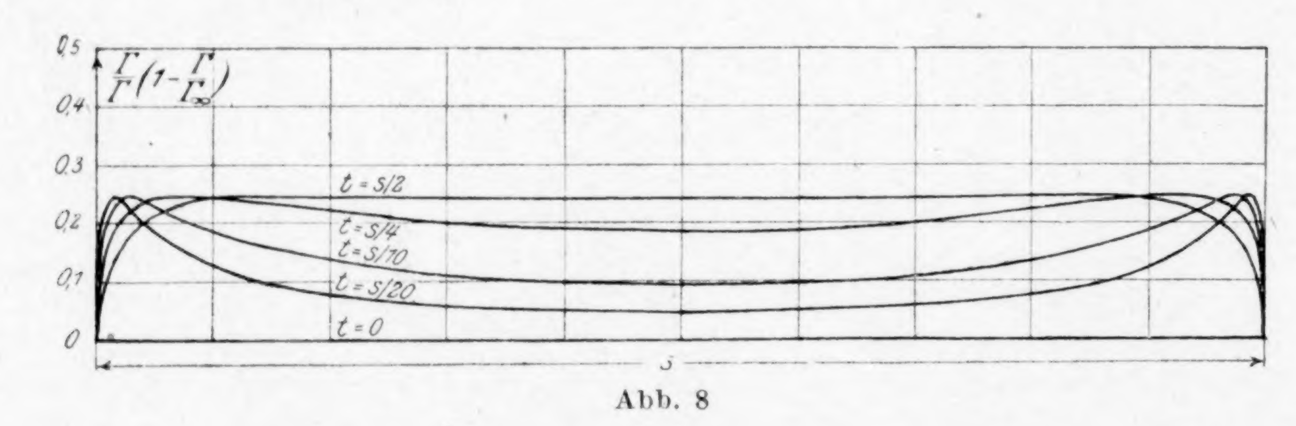


Abb. 8

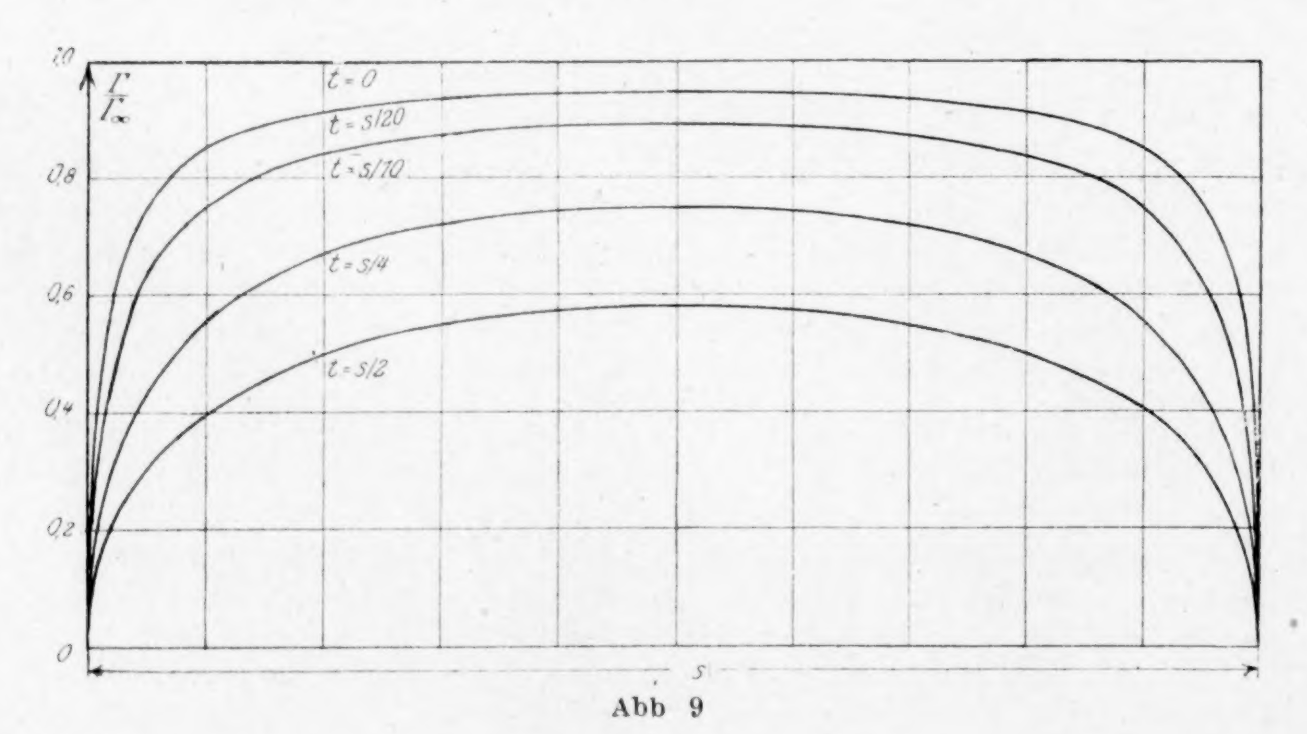


Abb 9

Für Tragflächen, für welche das Verhältnis von Spannweite zu Tiefe sehr groß wird, kann als Näherung für die Verteilung von Auftrieb und Widerstand in der Nähe der Enden die Auftriebs- und Widerstandsverteilung eines Streifens genommen werden, der sich nach einer Seite ins Unendliche erstreckt. Ich habe nach den gleichen Prinzipien wie oben auch diesen Fall durchgerechnet. In Abb. 10 und 11 sind die Resultate wiedergegeben.

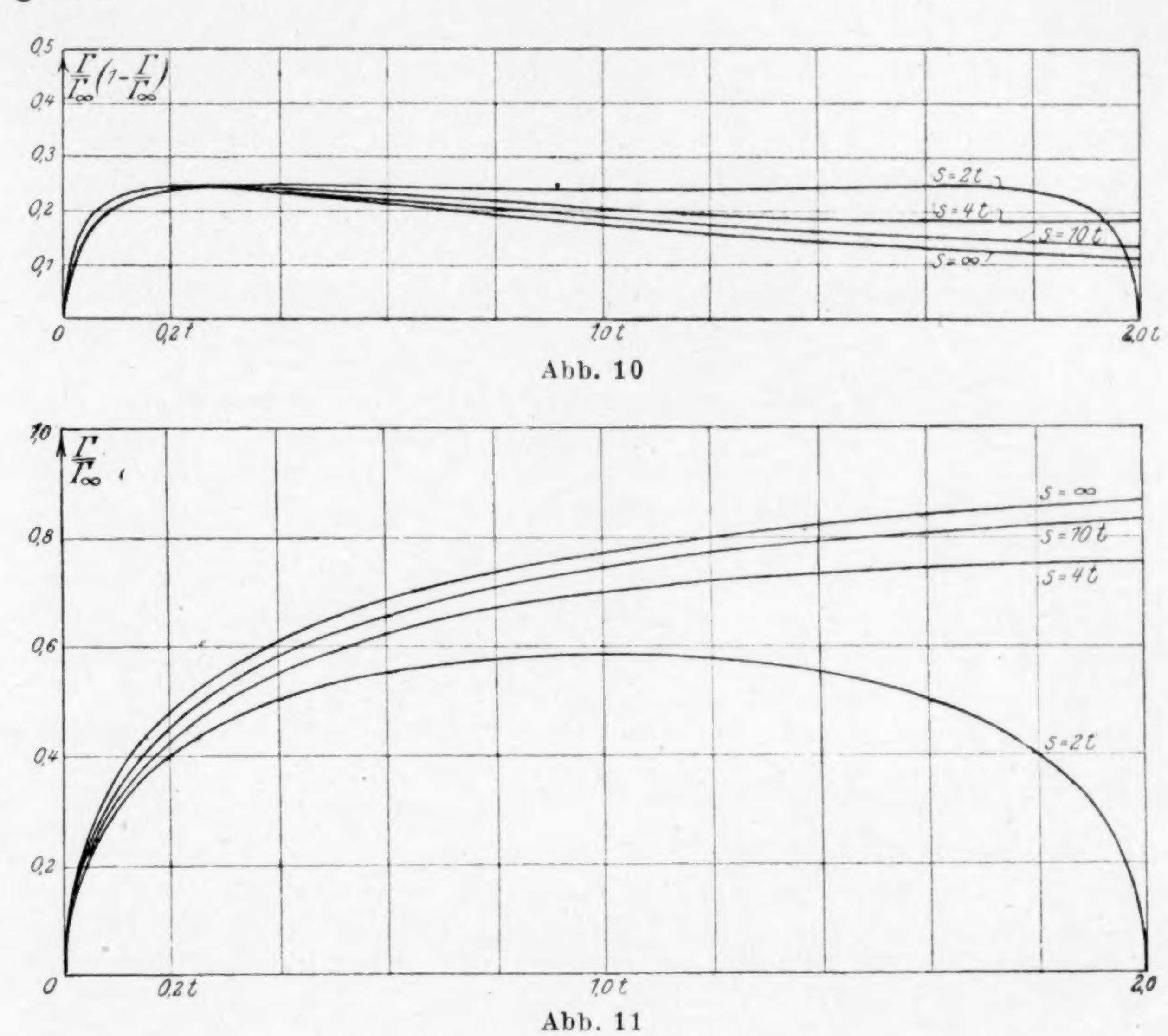


Abb. 10

Abb. 11

Zur besseren Darstellung sind hier die Größen $\frac{\Gamma}{\Gamma_\infty}$ und $\frac{\Gamma}{\Gamma_\infty}\left(1 - \frac{\Gamma}{\Gamma_\infty}\right)$ bei festgehaltener Tiefe für veränderliche Spannweiten aufgetragen. Wir sehen an der Abbildung, daß in der Nähe der Enden, bis zu einem Abstande, der etwa $^1/_4$ der Tiefe beträgt, die Widerstandsverteilung für den unendlichen Streifen eine sehr gute Näherung für die Widerstandsverteilung auch der endlichen Tragflächen liefert. Der Vorzug der Tragflächen von großer Spannweite liegt in der Absenkung der Widerstandsdichte und dem Anwachsen der Auftriebsdichte in der Mitte der Tragfläche.

Bemerkt sei noch, daß der Maximalwert von $\frac{\Gamma}{\Gamma_\infty}\left(1 - \frac{\Gamma}{\Gamma_\infty}\right)$ stets gleich $^1/_4$ ist. Wir erhalten also — und dies gilt für jede Tragfläche — als obere Grenze für die Widerstandsdichte:

$$\frac{dW}{dx} < {}^1/_4\, \pi \varrho V^2 t \alpha^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (43),$$

d. h. den maximal möglichen Widerstand

$$W_{max} = \frac{\pi \varrho V^2}{4} \int t \alpha^2 \, dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (44).$$

Die Anwendung der Methode auf weniger einfache Fälle setzt voraus, daß man die Abbildung des Wirbelbandschnittes in der x-y-Ebene auf den Einheitskreis der ζ-Ebene kennt. Prinzipielle Schwierigkeiten bietet dieses nicht, wenn auch die Rechenarbeit zur Durchführung der Abbildung und zur Berechnung von Γ erheblich werden kann.

Beschränkt ist die Anwendbarkeit der Methode insofern, als sie sich nicht auf pfeilförmig gestellte Tragflächen übertragen läßt, weil dann die unseren Betrachtungen zugrunde liegende Bemerkung nicht mehr zutrifft, daß die Abwärtsgeschwindigkeit an

der Tragfläche gerade die Hälfte der Abwärtsgeschwindigkeit im Unendlichen hinter der Tragfläche beträgt. Es sei bemerkt, daß dieser Fall auch der Betzschen Methode noch Schwierigkeiten bietet, die vor der Hand noch nicht behoben sind.

5. Schraubenpropeller mit geringstem Energieverlust. In der gleichen Weise wie wir im zweiten Abschnitt die Bedingung dafür abgeleitet haben, daß eine Tragfläche bei gegebenem Auftriebe einen möglichst geringen Widerstand haben soll, können wir auch die analoge Minimalbedingung für einen Schraubenpropeller aufstellen, d. h. die Frage beantworten, wann ein Propeller bei gegebenem Schub mit möglichst geringem Energieverlust arbeitet. Wir gehen von der gleichen Grundannahme aus, wie früher, daß wir nämlich die Eigenbewegung der von der Propellerhinterkante sich loslösenden Wirbelfäden vernachlässigen können .(Fall schwacher Belastung). Bewegt der Propeller sich also mit einer Geschwindigkeit V vorwärts, indem er sich mit einer Winkelgeschwindigkeit ω um seine Achse dreht, so erfüllen die Wirbelfäden hinter dem Propeller die Schraubenflächen, welche die einzelnen Propellerpunkte durchlaufen. Für die Berechnung wollen wir wieder ein Koordinatensystem im Propeller fest annehmen und die Relativbewegung der Luft zu diesem betrachten, siehe Abbildung 12. Fassen wir ein Flügelelement von der Breite dr ins Auge, dessen Entfernung von der Achse gleich r ist, so hat die Relativgeschwindigkeit (Anblasegeschwindigkeit) der Luft eine axiale Komponente V (von der Fortbewegung des Propellers herrührend) und eine seitliche Komponente $r\,\omega$ (infolge der Drehung des Propellers). Der Winkel ε zwischen der resultierenden Luftgeschwindigkeit und ihrer seitlichen Komponente ist der Steigungswinkel der von dem betrachteten Flügelelement beschriebenen Schraubenlinie. Berechnen wir die Axialkomponente $d\,S$ der Luftkraft $d\,P$, welche auf das Flügelelement ausgeübt wird, so erhalten wir

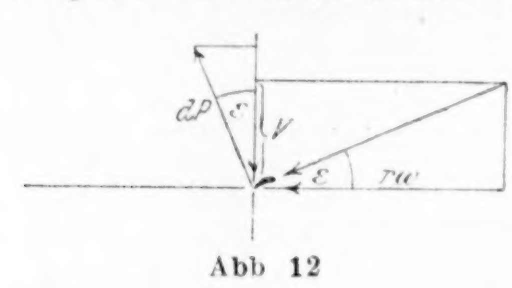


Abb 12

$$d\,S = d\,P\cos\varepsilon = d\,P\,\frac{r\,\omega}{\sqrt{V^2 + r^2\,\omega^2}}$$

und

$$d\,P = \varrho\,\Gamma\,\sqrt{V^2 + r^2\,\omega^2}\,d\,r$$

also

$$d\,S = \varrho\,\Gamma\,\omega\,r\,d\,r \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (45).$$

Den gesamten Schub erhalten wir durch Integration längs der einzelnen Flügel und Summation über die sämtlichen Flügel

$$S = \varrho\,\omega\sum_1^n\int_0^R \Gamma\,r\,d\,r \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (46).$$

Um den Energieverbrauch des Propellers zu berechnen, stellen wir eine analoge Betrachtung an, wie früher für die Tragfläche. Wir betrachten wieder die Luft zwischen zwei Kontrollebenen E_1 und E_2 in sehr großer Entfernung vor und hinter dem Propeller. Nach einer Sekunde sind diese um die Strecke V fortgerückt in die Lage E_1' und E_2'. In dieser Zeit hat sich die Strömungsenergie der betrachteten Luftmasse um die Energie derjenigen Strömung vergrößert, die zwischen E_2 und E_2' von den Wirbelfäden des von dem Propeller ausgehenden schraubenförmigen Wirbelbandes herrührt. Diese Energiemenge, die als Wirbelenergie ungenutzt in der Flüssigkeit stecken bleibt, stellt den Energieverlust dar, der vom Schraubenantrieb gedeckt werden muß, und den zu einem Minimum zu machen unsere Aufgabe ist. Es sei $\varphi\,(x, y, z)$ das Potential der von den Wirbelfäden herrührenden Bewegung; dann ist die Verlustenergie

$$H = \frac{\varrho}{2}\int \operatorname{grad}^2\varphi\,d\,\tau \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (47),$$

wo $d\,\tau$ das Raumelement ist und die Integration sich über den von den Kontrollebenen E_2 und E_2' begrenzten Raum zu erstrecken hat. Um bei gegebenem Schub S das Minimum von H zu bestimmen, bilden wir die Variationen $\delta\,H$ und $\delta\,S$, um welche sich H und S ändern, wenn wir φ um $\delta\,\varphi$ variieren. Wir erhalten

$$\delta\,S = \varrho\,\omega\sum_1^n\int_0^R \delta\,\Gamma\,r\,d\,r \qquad \delta\,H = \varrho\int \operatorname{grad}\varphi\,\operatorname{grad}\delta\,\varphi\,d\,\tau \quad . \; . \; . \quad (48).$$

Dieses Integral formen wir wieder durch die Formel

$$\operatorname{div}\{\delta\,\varphi\,\operatorname{grad}\varphi\} = \delta\,\varphi\,\operatorname{divgrad}\varphi + \operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad}\delta\,\varphi \quad . \; . \; . \quad (49)$$

um und erhalten (da $\operatorname{div}\operatorname{grad} \varphi = 0$ ist)

$$\int \operatorname{grad} \varphi \operatorname{grad} \delta \varphi \, d\tau = \int div\, \delta \varphi \operatorname{grad} \varphi \, d\tau = \int \delta \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \, do \quad . \quad . \quad (50)$$

also

$$\delta H = \varrho \int \delta \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} do \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51),$$

wo do das Oberflächenelement und ν die äußere Normale an die Begrenzung des Raumes zwischen den beiden Kontrollebenen ist, über welche die Integration zu erstrecken ist. Als Begrenzung kommen in Frage 1. die beiden Kontrollebenen selbst, deren Anteile sich aber gegeneinander wegheben, 2. das Unendliche, das nichts beiträgt, 3. die Oberfläche des Wirbelbandes. Von dieser geht jedes Flächenelement zweimal in die Integration ein; einmal als Element der Oberseite, einmal als Element der Unterseite. Bezeichnen wir mit n die Normale, die durch das Wirbelband von oben nach unten führt, so ist an der Oberseite

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = \frac{\partial \varphi}{\partial n},$$

an der Unterseite

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = -\frac{\partial \varphi}{\partial n},$$

da die Normalkomponente der Geschwindigkeit $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)$ beim Durchtritt durch das Wirbelband stetig bleibt. Wir fassen wieder die von der Oberseite und der Unterseite herrührenden Anteile des Oberflächenintegrals zusammen, indem wir durch die Indices o und u die Potentialwerte an Oberseite und Unterseite unterscheiden. Wir erhalten:

$$\delta H = \varrho \int (\delta \varphi_o - \delta \varphi_u) \frac{\partial \varphi}{\partial n} do \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

und daraus, wenn wir berücksichtigen, daß der Sprung des Potentials am Wirbelband $\delta \Gamma = \delta \varphi_o - \delta \varphi_u$ ist:

$$\delta H = \varrho \int \delta \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial n} do \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53).$$

Nun ist $\delta \Gamma$ längs der Wirbellinien, d. h. längs der die Schraubfläche erzeugenden Schraubenlinie konstant. Wir können deshalb in der Integration als Oberflächenelement einen Streifen der Schraubenlinie von der Breite dr wählen, dessen Fläche zwischen den beiden Kontrollebenen

$$do = \frac{V\,dr}{\sin \varepsilon} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

ist. Es wird also

$$\delta H = \varrho V \sum_1^n \int_0^R \delta \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{dr}{\sin \varepsilon(r)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55).$$

Soll nun bei gegebenem Schub S die Verlustenergie E ein Minimum werden, so muß für beliebiges $\delta \Gamma$

$$\delta S = \lambda \delta H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

sein, also

$$\varrho \sum_1^n \int_0^R \delta \Gamma \left\{ \omega r - \frac{\lambda V \frac{\partial \varphi}{\partial n}}{\sin \varepsilon} \right\} dr = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56),$$

was bei beliebigem $\delta \Gamma$

$$\omega r = \frac{\lambda V \frac{\partial \varphi}{\partial n}}{\sin \varepsilon} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

oder

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = C \omega r \sin \varepsilon \quad \left(C = \frac{1}{\lambda V}\right)$$

erfordert.

Das ist die Betzsche Minimalbedingung für den Schraubenpropeller mit geringstem Energieverlust. Man kann ihr eine ähnliche Deutung geben wie der Munkschen Bedingung für die Tragflächen. Denken wir uns nämlich die von dem Propeller aus-

gehenden Schraubenflächen starr, etwa aus Blech ausgeführt, und würden wir diese Schrauben flächen mit konstanter Geschwindigkeit rückwärts bewegen, so würde die entstehende Potentialströmung gerade eine solche sein, wie sie die Betzsche Bedingung erfordert. Auf Grund dieser Vorstellung hat Prandtl die der Minimalbedingung entsprechende Zirkulationsverteilung näherungsweise berechnet, wie sie in Abb. 13 wiedergegeben ist. 38

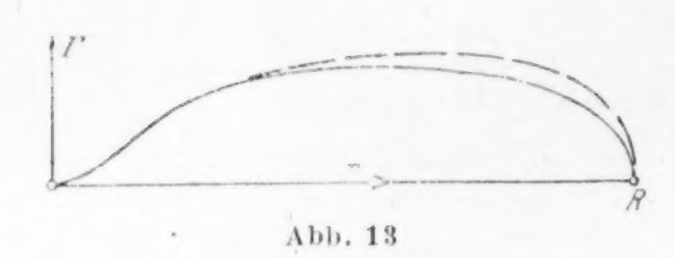


Abb. 13

Das Turbulenzproblem.

(Nachtrag und Berichtigung.)[1])

Von **F. NOETHER** in Berlin.

Einige neuere Arbeiten, die das Turbulenzproblem betreffen, waren mir erst verspätet zugänglich. Herr L. Schiller hat mir das Manuskript seiner demnächst in dieser Zeitschrift erscheinenden ausführlichen Arbeit zur Verfügung gestellt. Die wertvollen Versuchsergebnisse können weiter zur Klärung der Turbulenzfrage beitragen. Es war früher wiederholt (z. B. von J. Morrow[2])) auf die Unsicherheit hingewiesen worden, die in die Messung der kritischen Zahl dadurch hineinkommt, daß infolge der Einströmungsverhältnisse die zum Ausgang genommene Laminarströmung unvollkommen hergestellt wird. Solche Einflüsse können auch bei den von allen anderen stark abweichenden Resultaten von Ruckes (vergl. S. 127) vorgelegen haben. L. Schiller zeigt nun, daß bei hinreichender »Anlauflänge«, d. h. Entfernung der Meßstelle vom Einlauf in das Versuchsrohr, sich immer eine scharf bestimmte untere Grenze der Reynoldsschen Zahl für den Uebergang zwischen laminarer und turbulenter Bewegung einstellt, die dann als die kritische Zahl aufzufassen ist. Die Stelle, an der der Uebergang tatsächlich stattfindet, hängt, übereinstimmend mit Ekmans Resultaten, von der Größe der am Einlauf stattfindenden Störung ab und konnte in glatten Rohren bis 11 000 erhöht werden, auch in rauhen bis 9600. Nie aber konnte die Grenze $\mathfrak{R} = 1160$ unterschritten werden. Diese untere Grenze scheint auch von der Rauhigkeit der Röhren unabhängig zu sein, da sie sich für gleichartige Metallrohre verschiedener Weite, also verschiedener »relativer Rauhigkeit«, übereinstimmend ergab und auch wenig von der von Reynolds mit Glasröhren festgestellten unteren Grenze[3]) abweicht.

Wenn die Unabhängigkeit des Eintritts der Turbulenz vom Rauhigkeitsgrad des Rohres gesichert ist. so scheint mir das, übereinstimmend mit Hrn. **Schiller**, eine starke Stütze für die im Bericht vertretene Auffassung der Turbulenz als eines freien Bewegungszustandes, für den die am Einlauf stattfindenden, sowie sonstige größere Störungen auslösenden Charakter haben, ohne daß andauernde Erregung im weiteren Verlauf der Strömung nötig wäre. Eine endgültige Entscheidung über die Frage, ob durch Wandrauhigkeit »erzwungene« Bewegung vorliegt, würden allerdings erst Versuche über den Einfluß einer fortgesetzten Verminderung der Wandrauhigkeit ergeben. Bemerkenswert ist auch im Zusammenhang mit den unter II besprochenen theoretischen Ergebnissen die Feststellung, daß an der kritischen Grenze $\mathfrak{R} = 1160$ der Unterschied zwischen dem Widerstand des laminaren und des turbulenten Zustandes bereits ein bestimmter endlicher ist.

In ähnlichem Sinne sind neuere Versuche von T. E. Stanton und seinen Mitarbeitern[4]) wichtig für die Turbulenzfrage. Die Verfasser haben durch sehr feine Pitot-Rohre die Geschwindigkeit bis in unmittelbarste Nähe der Wand (bis 0,03 mm Abstand) gemessen und das Vorhandensein der parabolischen Verteilung in der Randschicht ohne

[1]) S. diese Zeitschrift 1 1921 S. 125 bis 133.

[2]) Proc. Royal Soc. London A 75 1905.

[3]) Berichtigung: Hr. L. Schiller macht mich darauf aufmerksam, daß meine Angabe 1900 für diese Zahl irrig ist, vielmehr im Mittel 1000 bis 1200 aus Reynolds Versuchen zu entnehmen ist. Die vergleichenden Bemerkungen auf S. 128 des Berichts werden damit hinfällig.

[4]) On the conditions at the boundary of a fluid in turbulent motion. Proc. R. Soc. London A 97 S. 413 1920. S. auch Physik Berichte 2 1921 S. 561.

Gleiten an der Wand selbst festgestellt, wie sie von der hydrodynamischen Theorie glatter Rohre gefordert wird. Es ist schwer denkbar, daß bei dieser Verteilung, wo wegen des Haftens an der Wand deren Unebenheiten sozusagen glatt überdeckt werden, die molekulare Rauhigkeit der Wand noch ausschlaggebenden Einfluß haben kann, und insofern scheinen auch diese Versuche für unsere obige Auffassung zu sprechen.

Der gegenteiligen Auffassung der Turbulenz als einer durch fortdauernde Störungen erzwungenen Bewegung sucht C. W. Oseen[1]) vom theoretischen Standpunkt näher zu kommen. Er untersucht die Wirkung andauernder, beliebig verteilter Kräfte auf eine unendlich ausgedehnte Flüssigkeit, deren Geschwindigkeitsverteilung dem laminaren Gesetz (für den ebenen Fall) genügt[2]). Es ergibt sich ein bestimmter gestörter Strömungszustand, aber im Grenzfall verschwindender Zähigkeit kann eine Komponente der erzeugten Strömung unendlich groß werden, so klein auch die störenden Kräfte sind (alles unter Beschränkung auf lineare Glieder zu verstehen). Wenn die Flüssigkeit begrenzende Wände hat, so fällt auch dieser Effekt weg, aber die Wirkung von störenden Kräften, deren Sitz in der Nähe der Wände ist, bedarf dann noch gesonderter Untersuchung, die der Verfasser in Aussicht stellt. Eine Andeutung, wie die andauernden Störungen bei bestimmter, nicht verschwindender Reibung den Uebergang zur Turbulenz bewirken könnten, ergibt die Untersuchung nicht. Sie bestätigt nur im Sinne der schon von Lord Kelvin geäußerten und in unserem Bericht vertretenen Auffassung, daß die Stabilität der Laminarbewegung mit abnehmender Zähigkeit immer geringer wird; im Grenzfall verschwindender Reibung ist der laminare Strömungszustand (und wohl auch jeder andere) ohne feste Begrenzungen ein »indifferenter« gegenüber Kräften ohne Kräftepotential. 71

KURZE AUSZÜGE

Elementare Mechanik.

Elastischer Stoß. (Hartmann, Variation systématique de la valeur de la force vive dans le choc élastique des corps, Comptes rendus, Paris, Bd. 164, 1917, S. 94—96.) Herr H. entdeckt durch Beobachtungen an Stahlzylindern, daß die Gesetze des elastischen Stoßes nicht richtig sind, daß zwar das Gesetz des Descartes von der Erhaltung der Bewegungsgröße, aber nicht das Leibnizsche Gesetz von der Erhaltung der lebendigen Kraft mit der Erfahrung übereinstimmt. Die gesamte lebendige Kraft erfährt vielmehr eine Verminderung, die dem Quadrat der Geschwindigkeitsdifferenz vor dem Stoße proportional ist. Ein empirischer Faktor, analog dem Restitutions-Koeffizienten wird eingeführt. — Das steht wohl schon in allen deutschen Lehrbüchern; wertvoll ist vielleicht das Beobachtungsmaterial, das zeigt, daß der Restitutions-Koeffizient von der relativen Geschwindigkeit abhängt.

Ballistische Kurve. (Olive, Sur le tracé mécanique de l'hodographe balistique, Comptes Rendus, Paris Bd. 164, 1917, S. 97—99.) Es wird ein einfacher Apparat angegeben, der gestattet, den Hodographen der ballistischen Kurve zu zeichnen, wenn der Luftwiderstand linear von der Geschwindigkeit abhängt. Man muß also den gesamten Bewegungsvorgang in Teile zerlegen, in denen die lineare Abhängigkeit mit genügender Annäherung erfüllt ist.

Drehung eines bewegten Balles. (Appell, Mouvements aériens gauches de sphères pesantes légères, Comptes Rendus, Paris Bd. 166, 1918, S. 22—23; Expériences de M. Carrière sur le mouvement aérien de balles sphériques légères tournant autour d'un axe perpendiculaire au plan de la trajectoire, Comptes Rendus, Paris Bd. 165, 1917, S. 694—696.) Es wird die Idee ausgesprochen, das Problem der Bewegung eines rotierenden Balles in Luft mit Hilfe der Hypothese zu behandeln, daß der Widerstand der Luft (eine Funktion der Geschwindigkeit) nicht der Geschwindigkeit entgegengesetzt gerichtet sei, sondern ein Vektor, der aus dieser Richtung durch Drehung um die Rotationsachse, der Rotation entgegen, durch einen spitzen Winkel entsteht, der eine wachsende Funktion der Drehgeschwindigkeit des Balles sei. Es sei ferner wahrscheinlich, daß die Bewegung bei dieser Annahme schließlich in eine gleichförmige senkrechte Bewe-

[1]) Ueber das Stabilitätsproblem in der Hydrodynamik II, Archiv f. Mat. Astr. of Fysik 14 1919 Nr. 16.

[2]) An Stelle der Kanalbreite, die sonst in die Reynoldssche Zahl eingeht, muß man sich hier eine gewisse Längendimension des Gebiets denken, in dem störende Kräfte wirken.

gung übergehe. Citiert werden zum Schluß ältere analoge Arbeiten von Lord Rayleigh (On the irregular flight of a tennis-ball, Mess. of Math. Bd. 3, 1877) und Greenhill (Mess. of Math. Bd. 9, 1880.)

Theorie des Dynamometers. (Schlussel, Sur la mesure des actions dynamiques rapides et irrégulièrement variables, Comptes rendus, Paris, Bd. 166, 1917, S. 456—459; Sur la valeur des accélérations et vitesses d'actions dynamiques enregistrées par le dynamomètre, ebenda S. 523—526.) Es handelt sich um die Theorie solcher Apparate, die dazu dienen sollen, heftige und unregelmäßige Erschütterungen zu messen. Solche Apparate sind im Prinzip Pendel mit großem Beharrungsvermögen; in ihrer Differentialgleichung

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+a^2x=\gamma$$

wird m groß sein. Auch γ, in dem die Wirkung der bewegten Unterlage auf den Apparat zum Ausdruck kommt, sei groß und etwa konstant. Die Differentialgleichung wird vom Verfasser so integriert, daß er den Vorgang in zwei Teile teilt:

1. Die Trägheitswirkung, die erste Periode, in der noch x klein ist und also angenähert mit Vernachlässigung des zweiten Gliedes

$$x=\frac{1}{2}\frac{\gamma}{m}t^2.$$

2. Die Periode wieder eintretender Ruhe

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0, \quad \text{daher } x=\frac{\gamma}{a^2}.$$

Der Verfasser läßt beide Perioden aneinander grenzen und berechnet aus

$$\frac{1}{2}\frac{\gamma}{m}t^2=\frac{\gamma}{a^2}$$

eine Dauer $$\Theta=\sqrt{2\frac{m}{a^2}}$$

der ersten Periode.

Diese einfache Methode mache alle schwierigen Integrationsmethoden überflüssig.

Nur verschweigt der Verfasser gerade das, worauf es bei allen solchen Apparaten ankommt, die starke Dämpfung, die allein veranlaßt, daß der Übergang aus der ersten Periode in die zweite Periode ziemlich schnell erfolgt, ja die überhaupt das Eintreten der zweiten Periode ermöglicht. Ohne Dämpfung würde der Apparat beständig um die durch die zweite Lösung gegebene Lage hin- und herschwanken. Die Arbeit ist also irreführend, ein normal ausgebildeter deutscher Ingenieur kann die Aufgabe besser lösen; was der berechneten Größe Θ für ein Sinn zukommen soll, kann ich nicht begreifen.

G. Hamel. 61.

Reibung.

Versuche über Reibung von Leder auf Eisen. Die für die Berechnung von Riementrieben grundlegende Frage nach dem Verhalten der Gleitreibung zwischen Leder und Eisen hat neuerdings im Materialprüfungsamt in Berlin eingehende Bearbeitung gefunden (Rudeloff, Versuche über die Reibung von Riemenleder auf gußeiserne Riemenscheiben, Mitteil. a. d. Materialprüfungsamt Berlin-Dahlem 38, 1920, S. 262—306). Kleine rechteckige Lederstücke von etwa 3—40 cm² Fläche, in Rahmen gespannt, wurden gegen den Umfang einer gußeisernen Scheibe, die in Drehung versetzt werden konnte, durch Gewichtsbelastung gepreßt. Die Richtung der Gleitbewegung zur Faserrichtung des Leders war nicht ohne Einfluß auf die Größe der Reibung, doch konnte eine klare Gesetzmäßigkeit hier nicht festgestellt werden. Hinsichtlich der Abhängigkeit von Flächengröße, Belastung und Geschwindigkeit fanden sich fast alle in der Literatur bekannten Ergebnisse wieder[1]. Die für die Anwendungen wichtigste Frage nach dem Einfluß der Geschwindigkeit auf den Reibungskoeffizienten fand die klarste Beantwortung, die in folgenden Zahlenreihen zum Ausdruck kommt: Es betrug der Quotient Reibungskraft durch Belastung bei einer Geschwindigkeit von

		I	II	III	IV	V
v=0	m/sec²	0,180	0,238	0,250	(0,187)	(0,311)
0,036	„	0,227	0,292	0,450	(0,347)	(0,361)
0,063	„	0,262			(0,423)	(0,371)
0,104	„	0,329	0,417	0,505	(0,553)	(0,378)
0,301	„	0,458			(0,817)	(0,412)
0,496	„	0,641	0,717	0,642	(0,740)	(0,413)
0,88	„	0,835			(0,639)	(0,450)

Die erste Zahlenreihe betrifft Riemenleder in fetthaltigem, die zweite dasselbe Leder in angearbeitetem Zustand, die dritte eine Lederprobe von Duffing. Einer zweiten Versuchsreihe mit dem ersten (fetthaltigen) Lederstück entspricht die Spalte IV, einer entfetteten Probe dieses Leders die Spalte V, doch sind die in Klammern gesetzten Zahlen so berechnet, daß vor Bildung des Quotienten von der Reibungskraft (die bis etwa 5 kg hinaufging) im Zähler die Konstante 0,12 kg im Falle IV, und 0,06 kg im Falle V, abgezogen wurde, weil nur auf diese Weise annähernd von der Belastung unabhängige Zahlen entstanden. — Das Anwachsen der Reibungszahlen mit der Geschwindigkeit steht in guter Übereinstimmung mit den früheren Versuchen, namentlich denen von Conti und Kimball. Warum die Proportionalität zwischen Reibung und Normaldruck in den Zuständen IV und V gestört war, ist nicht recht erklärlich, obwohl auch diese Erscheinung schon wiederholt beobachtet worden ist. (Sie wurde gelegentlich der „Adhäsion" zugeschrieben.)

[1] Vgl. das bis 1911 reichende Referat in Encykl. d. mathem. Wissensch., Bd. IV, Art. 10, S. 197—216.

Gleitreibung unter Vermittlung einer keilförmigen Schmierschicht. Gleitet ein Körper mit seiner ebenen Grundfläche auf einer ebenen Unterlage, während für die Aufrechterhaltung einer Schmierschicht zwischen beiden gesorgt ist, so stellen sich die beiden Gleitflächen unter einem kleinen Winkel gegeneinander ein, der durch Lage und Größe der Belastung usw. bestimmt wird. Gümbel berechnet für ein Rechteck von der Breite 1 (Forschungsarbeiten herausg. vom Ver. deutsch. Ing. H. 224, S. 1—27) auf der Grundlage der Reynolds-Sommerfeldschen Theorie in Übereinstimmung mit einer Arbeit von Rayleigh[1]) den dabei entstehenden Gleitwiderstand W und findet den Quotienten: W durch Belastung P proportional der Quadratwurzel aus dem Ausdruck Gleitgeschwindigkeit mal Zähigkeitszahl durch Last, also

$$\mu = \frac{W}{P} = \text{konst.} \sqrt{\frac{Z v}{P}} \quad \ldots \ldots (1)$$

Durch dieses Gesetz wird die „flüssige Reibung" charakterisiert, im Gegensatz zur „trockenen", die im Coulombschen Gesetz

$$\mu = \text{konst.} = \mu_0 \quad \ldots \ldots \ldots (2)$$

zum Ausdruck kommt. Gümbel nimmt an, daß (2) nur für $v = 0$ gilt, von einem bestimmten Kleinstwert des Ausdruckes $Zv : P$ an, dazwischen würde μ linear abnehmen, so daß

$$\mu = \mu_0 - \text{konst.} \frac{Z v}{P} \quad \ldots \ldots (3)$$

als Gesetz der „halbflüssigen Reibung" anzusehen wäre. Der Übergang von (3) zu (1) tritt bei jenem Wert der Variablen ein, bei dem die aus der Theorie der flüssigen Reibung berechnete Dicke der Schmierschichte an der engsten Stelle von der Größenordnung der die „Rauhigkeit" der Oberflächen ausmachenden Unebenheiten ist („Ausklinkzustand").

Merkwürdigerweise überträgt Gümbel Gl. (1) auch auf den Fall ineinanderlaufender Zylinder (Welle und Lager), für den bekanntlich die auf denselben Grundlagen aufgebaute Theorie zu einem etwas verwickelteren Zusammenhang zwischen Gleitzahl μ und $Zv : P$ führt. Dadurch entstehende Widersprüche gegenüber Sommerfeld sind in der mitabgedruckten Diskussion zum Gümbelschen Vortrag berührt.

Endlich enthält der Gümbelsche Aufsatz auch einige Angaben über einen neuen Zähigkeitsmesser, der schon in einem früheren Referat (ds. Zeitschr. 1, S. 76) erwähnt wurde. Eine ausführlichere Darstellung seiner Anschauungen in Verbindung mit vielen Angaben konstruktiver Art hat Gümbel früher im Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft 1917, S. 236—322 veröffentlicht.

[1]) Philos. magaz. 35, 1918, S. 1.

Theorie der Schmiermittelreibung. In der Zeitschrift für technische Physik (Bd. 2, 1921, S. 58—63 und 89—93) nimmt A. Sommerfeld Gelegenheit, über den Stand der Theorie, an deren Ausbau er hervorragenden Anteil besitzt, kurz zu berichten. Er betont zunächst, daß das „Ähnlichkeitsgesetz", wonach die Reibungszahl nur von dem Ausdruck $Zv : P$, Zähigkeit mal Geschwindigkeit durch Belastung, abhängt, sich im großen Ganzen bei den älteren Versuchen Stribecks sowohl wie bei den neueren Biels über Lagerreibung bestätigt hat. Abweichungen bei Stribeck im Gebiet höherer Werte von $Zv : P$ sind auf Temperatureinflüsse zurückzuführen[1]), gewisse Anomalien, die Biel gefunden hat (vgl. ds. Zeitschr. 1, S. 68), lassen noch keine sichere Erklärung zu. Über das Ähnlichkeitsgesetz hinaus bestätigen beide Versuchsreihen auch eine charakteristische Eigenschaft der theoretisch ermittelten Abhängigkeit der Reibungszahl von der Veränderlichen $Zv : P$, nämlich das Auftreten eines Kleinstwertes von μ, dessen Größe und dessen Stelle nur von dem Verhältnis des Lager-Spielraumes zum Wellendurchmesser abhängt. Läßt man $Zv : P$ über den das Minimum von μ liefernden Wert hinaus gegen null abnehmen, so ergibt die Theorie an einer bestimmten Stelle das Auftreten negativen Druckes, zeigt also an, daß die Voraussetzung einer die ganze Welle umfließenden, zusammenhängenden Schmierschicht gestört wird. Von hier an besteht nicht mehr „flüssige Reibung", sondern es tritt allmählicher Übergang zum Coulombschen Gesetz ein.

Schließlich berichtet Sommerfeld über die Rayleighsche Behandlung des Falles geradlinigen Gleitens unter Vermittlung einer keilförmigen Schmierschicht, die auch die Grundlage der im Vorangehenden referierten Arbeit von Gümbel bildete.

Theorie der Gleit- und Rollreibung. Wiederholt, und mit besonderem Nachdruck von Klein und Sommerfeld, ist der Ansicht Ausdruck gegeben worden, daß die scheinbar „trockene" Reibung, die wir an den Gleitflächen fester Körper beobachten, nur eine unvollkommen ausgebildete flüssige Reibung sei, bei der die Luft, bezw. eine dünne Gasschicht an der Körperoberfläche, die Rolle des Schmiermittels spielt. S. Fuchs sucht in einem längeren Aufsatz (Physik. Zeitschr. 22, 1921, S. 173—177 und 213—218) diese Ansicht näher auszuführen. Er geht von der Formel aus, die Petroff für die flüssige Reibung einer zentrierten in zylindrischem Lager umlaufenden Welle gegeben hat:

$$R = \frac{\eta F v}{h}, \quad \ldots \ldots \ldots (1)$$

wo η die Konstante der inneren Reibung (Zähigkeitszahl Z mal Massendichte) der Flüssigkeit, F die Gleitfläche, v die Gleitgeschwindigkeit und h die (überall gleiche) Dicke der Schmierschicht bedeutet. Nimmt man an,

[1]) Vgl. auch die »Kleine Mitteilung«, dieses Heft S. 225.

daß h proportional dem Ausdruck $vF:P$, wo P die Belastung, sich einstellt, so ergibt (1) das Coulombsche Gesetz. Wenn bei größeren Geschwindigkeiten h die Form hätte,

$$h = \text{konst.}\, v\, e^{\alpha v} \frac{F}{P}, \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

so würde sich für R eine exponentielle Abhängigkeit von der Gleitgeschwindigkeit ergeben, wie sie z. B. Franke 1882 auf Grund mannigfacher Versuche auf dem Gebiete der Eisenbahntechnik aufgestellt hat und wie sie auch mit den neueren, sehr sorgfältigen Laboratoriumsversuchen von Jacob übereinstimmt. — Die Überlegungen, mit denen Fuchs die Ansätze für h plausibel zu machen sucht, wirken wenig überzeugend. Noch weniger verständlich ist es, warum Gl. (1), die doch nur für die Umlaufbewegung eines zylindrischen Zapfens im umschließenden Lager (und zwar bei genauer Zentrierung) abgeleitet wurde, zur Erklärung des Widerstandes beim geradlinigen Gleiten herangezogen wird.

In dem zweiten Teil seiner Arbeit untersucht Fuchs die Verhältnisse der Rollreibung auf Grund eines eigenartigen Gedankenganges. Er sieht den Hauptgrund des Rollwiderstandes in der unvollkommenen Elastizität des rollenden Körpers und der Unterlage. Geht man von den Hertzschen Formeln für die Druckverhältnisse beim Gegeneinanderpressen zweier Walzen aus und nimmt an, daß das ψ-fache ($\psi < 1$) der aufgewandten Formänderungsarbeit verloren geht, d. h. nicht wieder erscheint, während beim Weiterrollen die Formänderung rückgängig wird, so gelangt man zu folgendem Ansatz für den „Hebelarm der Rollreibung"

$$\frac{M}{P} = \frac{3\,\psi}{32}\, \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{\vartheta_2} \sqrt{\frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{\pi}\, \frac{P}{\varrho}} \quad \ldots \quad (3)$$

Hierin bedeutet P die Belastung für die Längeneinheit der Walze, M das zugehörige Reibungsmoment, ϑ_1 und ϑ_2 sind elastische Konstanten der beiden Körper, ϱ die entsprechend gerechnete Summe der Krümmungen. In Übereinstimmung mit Versuchen von Dupuit und von Perry ist nach (3) beim Rollen eines Zylinders auf ebener Unterlage der „Hebelarm" der Quadratwurzel aus dem Zylinderradius proportional.

In zweiter Linie untersucht Fuchs den Einfluß des Gleitwiderstandes auf die Rollreibung, indem er auf Grund der Reynoldsschen Anschauungen den Schlupf zu berechnen sucht, der bei der Rollbewegung infolge der Elastizität der Unterlage entsteht. Auch auf die Bewegung von Kugeln werden die Betrachtungen ausgedehnt.

Über die Natur des Reibungsvorganges berichtet W. B. Hardy in einem Vortrag (Nature, Bd. 106, 1920, S. 569—572). Er geht von der Ansicht aus, daß eine zähe Flüssigkeit in zweierlei ganz verschiedener Weise die Reibung zwischen zwei festen Körpern beeinflussen könne. Erstens, indem sie eine genügend dicke zusammenhängende Schmierschicht bildet, innerhalb deren die Gesetze der Hydrodynamik zäher Flüssigkeiten zur Geltung kommen, während die Oberflächen-Eigenschaften der beiden festen Körper gänzlich ausgeschaltet sind; zweitens als dünnes Häutchen, durch das hindurch die beiden gleitenden Körper einander immer noch beeinflussen. Zwischen diesen beiden Vorgängen gäbe es keinen stetigen Übergang. Im folgenden ist dann immer nur die zweite Art der Erscheinung gemeint.

Sicher ist, nach Ansicht des Verfassers, daß die Größe des Reibungskoeffizienten der Ruhe (der Grenze der Haftreibung) sowohl von der chemischen Beschaffenheit der Körper wie der des Schmiermittels abhängt. Wasser z. B. vergrößert die Reibung zwischen zwei Glasplatten, vermindert aber die Reibung zwischen Ebonit und Glas. Die Annahme, daß etwa die Kapillarität des Wassers eine Rolle spielen könnte, ist schon durch Rayleighs numerische Abschätzungen widerlegt. Daß die Rauhigkeit der Körperflächen die Reibung herbeiführe oder entscheidend beeinflusse, glaubt der Verfasser nicht. Für wesentlich hält er die Anziehungskräfte zwischen den Molekeln, sowohl der festen Körper als der Schmierflüssigkeit. Diese Ansicht wird besonders belegt durch die Untersuchung des Haftens vollkommen gereinigter Glasplatten. Was man schlechthin „gereinigte" Platten nennt, sind solche, die ein aus allerlei atmosphärischen Niederschlägen gebildetes Schmiermittelhäutchen von etwa 1 Millionstel mm Dicke besitzen. Entfernt man dieses durch sorgfältige Behandlung, so haften die Platten so fest aneinander, daß es überhaupt nicht möglich ist, eine Gleitbewegung einzuleiten. Wasser, Alkohol, Ammoniak zwischen solche ideal reine Glasplatten gebracht, ändert an der Erscheinung nichts; andere Flüssigkeiten, wie fette Säuren, Paraffin usf. vermindern die Haftreibung mehr oder weniger.

Eine sorgfältige Untersuchung widmet dann der Verfasser der Abhängigkeit der Reibungszahl von der chemischen Beschaffenheit des Schmiermittel-„Häutchens". Es wird in seiner Dicke von molekularen Abmessungen einfach dadurch erzeugt, daß an eine irgendwie entfernte Stelle der Oberfläche ein Tropfen der Flüssigkeit aufgebracht wird: augenblicklich überzieht sich die ganze Oberfläche mit dem Häutchen, dessen Existenz direkt nachgewiesen werden kann durch die gegenseitige Beeinflussung zweier weit entfernter Tropfen. Die wichtigsten Ergebnisse sind die, daß die Reibungszahl innerhalb einer einfachen chemischen Reihe mit Kettenbildung (fette Säuren, Alkohole, Paraffine) mit zunehmendem Molekulargewicht abnimmt. Die Abhängigkeit ist annähernd linear bei Paraffinen und Benzolen, ein andermal scheint sie verwickelter zu sein. Der Einfluß der chemischen Konstitution, namentlich die Frage, ob Ring- oder Kettenbindungen vorliegen, überdeckt den unmittelbaren Einfluß des Molekulargewichtes.

Es lag schließlich nahe, den Zusammenhang zwischen der Reibungszahl und der Konstanten der inneren Reibung des Schmiermittels näher zu verfolgen. Allein auch hier fanden sich keine klaren Gesetzmäßigkeiten. Einige Zahlen sind folgende:

Innere Reibung bei 20° C	0,0096	0,0056	0,0122	0,0575	0,0065	0,5558
Reibungzahl der Ruhe	0,43	0,30	0,40	0,19	0,39	0,31.

Man muß dem Verfasser darin Recht geben, daß die Untersuchung der Reibungs-Erscheinungen für den Ingenieur wie für den Physiker gleich interessant zu werden verspricht, wenn man ihr eingehendere Aufmerksamkeit widmet. Hoffentlich werden derartige Forschungen auch bei uns bald aufgenommen werden.

Rollwiderstand einer Lokomotive. Dem praktischen Bedürfnis der Eisenbahntechnik dienen, wie bekannt, gewisse „generalisierende Widerstandsformeln", in denen die Gesamtheit der einer horizontalen Fortbewegung entgegenwirkenden Kräfte zusammengefaßt ist, nämlich Rollreibung zwischen Rad und Schiene, Zapfenreibung in den Radbüchsen, Reibung im Lauf- und Triebwerk und an den Bürsten der Elektromotoren, endlich der Luftwiderstand gegen das ganze Fahrzeug. Über eine Versuchsreihe mit einer 48,5 t schweren Einphasen-Lokomotive der niederösterreichisch-steirischen Alpenbahn berichtet G. Markt (Elektrotechnik u. Maschinenbau, 39, 1921, S. 209—212). Der Gesamtwiderstand für das Gewicht G bei der Geschwindigkeit v in m/sec fand sich zu

$$W = G\,(0{,}004 + 0{,}000064\,v^2).$$

Die Versuche erstreckten sich auf Geschwindigkeiten von 3 bis 11 m/sec. — Faßt man das zweite Glied als reinen Luftwiderstand auf, so entspricht er einer „schädlichen Fläche" $F = 48{,}5 \cdot 0{,}064 : 0{,}08 = 38{,}8$ m². Es ist aber anzunehmen, daß darin auch eigentliche Reibungskräfte, die mit der Geschwindigkeit wachsen, enthalten sind. Mises. 61

BUCHBESPRECHUNGEN

HERMANN **ROTHE,** ord. Professor a. d. Techn Hochschule Wien: Vorlesungen über höhere Mathematik Wien 1921, L. W. Seidel & Sohn, 691 S., 142 Fig.

Die deutsche mathematische Literatur ist keineswegs reich an Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung, die den modernen Anforderungen an Strenge und Eleganz der Darstellung genügen und dennoch dem Anfänger ohne pädagogische Bedenken empfohlen werden können. Unter diesem Gesichtspunkt ist das Erscheinen des vorliegenden Werkes sehr zu begrüßen. Wenn der Verf. in der Vorrede sagt, daß er getrachtet habe, die Begriffsbildung und Beweisführung so streng und exakt wie möglich zu gestalten, so hat er tatsächlich nicht zu viel versprochen. Daneben ist es ihm aber gelungen, die — durch zahlreiche Beispiele unterstützte — Darstellung selbst für den Ungeübten durchaus verständlich und recht anregend zu gestalten. Die deutliche Hervorhebung aller Definitionen, Sätze und Formeln und beständige Hinweise auf frühere Stellen des Textes lassen das Buch auch als Nachschlagewerk für Ingenieure und Naturwissenschaftler recht brauchbar erscheinen.

Was nun den Inhalt dieser der Infinitesimalrechnung gewidmeten „Vorlesungen über höhere Mathematik" betrifft, so sah sich der Verf. in der Absicht, das Werk auf einen Band von nicht übermäßigem Umfang zu beschränken, leider genötigt, auf die Behandlung einiger wichtiger Abschnitte zu verzichten. Neben manchen geometrischen Anwendungen der Differentialrechnung fehlen die Theorie der Extrema und die Theorie der Reihen; doch ist die letztere durch eine ausführliche Behandlung der Limessätze und der gleichmäßigen Konvergenz so weit vorbereitet, daß die selbständige Herleitung ihrer Grundtatsachen dem Leser keine Schwierigkeit bereiten dürfte. Auch die Theorie der Irrationalzahlen ist unterdrückt. Der Verf. nimmt die reellen Zahlen als gegeben hin und stellt das Axiom vom Dedekindschen Schnitt an die Spitze seiner Betrachtungen. Nach Einführung des Mengenbegriffs werden daraus die Sätze über obere und untere Grenze, über Häufungswerte von Zahlenmengen und über konvergente Zahlenfolgen gewonnen. Vielleicht hätte bei dieser Herleitung die Tatsache, daß bis zum Limeskalkül nur die den Ordnungstypus der reellen Zahlen betreffenden Axiome gebraucht werden, etwas schärfer hervorgehoben werden können. — Den Abschluß dieses ersten Hauptabschnitts bilden einfache Sätze über ebene und räumliche Punktmengen. Daß zum Beweise des Bolzano-Weierstraßschen Satzes für ebene Punktmengen das Beweismotiv der fortgesetzten Halbierung herangezogen wird, erscheint unnötig, da ja der Satz durch Projektion auf den linearen Fall reduziert werden kann. Dieselbe Bemerkung ist übrigens auch über den Beweis des Bolzanoschen Satzes für stetige Funktionen zu machen. Der Beweis, der [unter der Annahme $f(a) < o$, $f(b) > o$] mit der oberen Grenze derjenigen Werte x aus $[a, b]$ operiert, für die $f(x)$ negativ ist, hätte sich dem Buche besser angepaßt als derjenige, der mit der Intervallteilung operiert und hier übrigens in einer von der üblichen etwas abweichenden Fassung gegeben wird, die von Herrn J. Radon herrührt. — Der zweite Hauptabschnitt „Der Funktionsbegriff" ist in der Hauptsache dem Stetigkeitsbegriff gewidmet und mit großer Sorgfalt und Ausführlichkeit abgefaßt. Besonders hübsch sind die Beweise der Stetigkeitssätze für Funktionen mehrerer Veränderlicher, die allgemein für abgeschlossene beschränkte Punktmengen formuliert werden. Es ist schade, daß der Verf. — wohl aus Mangel an Raum — die Stetigkeitssätze nicht für den allgemeinen Fall von n

Funktionen mit m Veränderlichen formuliert hat; es würde dann die Tragweite seiner Beweismethoden noch mehr hervortreten. Großes Gewicht legt der Verf. auf seine Behandlung der zusammengesetzten Funktion. Diese ist aber auch in anderen Büchern — z. B. bei Kowalewski und bei von Mangoldt — durchaus streng. Ist $y = f(u)$ und $u = \varphi(x)$, so wird aus der Konvergenz von x $(x \to x_0)$ die Konvergenz von y $[y \to y_0,\ y_0 = f(\varphi(x_0))]$ nicht ohne weitere Voraussetzung (wie der Verf. in seinem Vorwort sagt), sondern nur für den Fall erschlossen, daß $u = \varphi(x)$ an der Stelle x_0, $y = f(u)$ an der Stelle $u_0 = \varphi(x_0)$ stetig ist. H. Rothe beweist dafür den allgemeineren Satz: „Hat $u = \varphi(x)$ an der Stelle $x = x_0$ den Grenzwert u_0 und ist $y = f(u)$ an der Stelle $u = u_0$ stetig, so ist

$$\lim_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = \lim_{x \to x_0} f(u) = f(u_0).“$$

Noch eine Bemerkung zur Definition der trigonometrischen Funktionen: Der Verf. setzt die Bogenlänge des Kreises und bei Herleitung der Ungleichung

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x$$

die Flächeninhalte von Dreieck und Kreissektor voraus. Will man die trigonometrischen Funktionen geometrisch und nicht erst durch unendliche Reihen definieren — ein Weg, der dem Verf. durch die Anlage seines Buches ohnehin versperrt ist —, so kann man diese Härte vermeiden, indem man für den Kreisbogen die Existenz einer endlichen Bogenlänge als oberer Grenze der Längen aller dem Bogen einbeschriebenen einfachen Polygonzüge nachweist, eine Untersuchung, die sich mit einfachen geometrischen Mitteln streng durchführen läßt. — Die drei folgenden Abschnitte (§§ 4—7) behandeln die Differentialrechnung mit Einschluß der Theorie der impliziten Funktionen, die letzten fünf die Integralrechnung. Hier möchte ich vor allem auf die Darstellung des einfachen bestimmten und des uneigentlichen Integrals (§§ 9 und 10) hinweisen, die in ausgezeichneter Weise Strenge und Eleganz mit Reichhaltigkeit und Klarheit verbindet. In der Definition des Inhalts einer ebenen Punktmenge und des zweifachen Integrals geht der Verf. den entgegengesetzten Weg wie Jordan in seinem Cours d'analyse. Zunächst werden für eine auf einem abgeschlossenen Rechteck beschränkte Funktion das untere und obere Integral aufgestellt. Ist $e(x, y)$ die bekannte charakteristische Funktion einer beschränkten Punktmenge der xy-Ebene, so werden das untere und obere Integral dieser Funktion $e(x, y)$ als innerer und äußerer Jordanscher Inhalt definiert. Als Anwendung bringt der letzte Abschnitt die Rektifikation, Quadratur, Komplanation und Kubatur. Leider macht sich auch in diesen letzten beiden Abschnitten der Raummangel wieder recht bemerkbar: Vor allem wird das Fehlen der Transformation mehrfacher Integrale schmerzlich empfunden werden.

Gewiß wird der Verfasser, der Lehrer an einer Technischen Hochschule ist, in seinen Vorlesungen und Übungen andere Dinge, die dem Interessenkreis des Technikers näher liegen, mehr hervortreten lassen als die im Buche vorzugsweise behandelten. Die große Klarheit, Anschaulichkeit und Deutlichkeit, mit der er es verstanden hat, den spröden Stoff zu meistern, zeugt jedenfalls von besonderem pädagogischen Geschick und von Verständnis für die Bedürfnisse des Lernenden. Dem Ingenieur, der in die Denkweise der modernen Analysis eindringen und ihre schönen Früchte kennen lernen will, kann kein geeigneterer Weg dazu empfohlen werden als das Rothesche Buch. 68

G. Feigl.

Prof. Dr. G. **HAMEL**, Mechanik I: Grundbegriffe der Mechanik. (Aus Natur und Geisteswelt Bd. 684) Leipzig bei Teubner 1921 132 S.

Es ist sehr zu begrüßen, daß die Teubnersche Verlagsbuchhandlung an Stelle der bisherigen Mechanik in ihrer Sammlung kleiner, zur ersten Einführung bestimmter Lehrbücher neue Bändchen erscheinen läßt, in denen ein durchaus berufener Fachmann auf diesem Gebiet zu Worte kommt. Von dem ganzen Lehrgang, der auf drei Teile berechnet ist, liegt zunächst der erste vor, der die allgemeinen Grundsätze und Begriffsbildungen der Mechanik behandelt. Die Darstellung ist bei aller Einfachheit und Verständlichkeit eine so originelle und reizvolle, daß nicht nur der Laie, sondern auch jeder Studierende und wohl auch mancher, der die Mechanik nicht mehr studieren zu müssen glaubt, recht viel daraus lernen kann. Der Verfasser stellt sich auf den naturgemäßen Boden der Anschauung und der Beobachtung und entwickelt von hier aus, das Energie-Prinzip in den Vordergrund stellend, den Kraftbegriff der Newtonschen Mechanik, um dann nach Ausführung des Schwerpunkt- und Momentensatzes zu einer eingehenden Erörterung der Reibungs- und Luftwiderstandskräfte überzugehen. In einem Anhang werden die Gesetze der Relativ-Bewegung besprochen. Nicht so ganz einverstanden wird man sich mit den Andeutungen des Verfassers über die Einsteinsche Relativitäts-Theorie erklären können. Hier wird der Eingeweihte gewiß mit großem Interesse die originellen Wendungen verfolgen, die der Verfasser dem Gegenstand zu geben weiß, allein für den größeren Leserkreis, für den das Buch doch bestimmt ist, bedeutet ein Satz wie der, daß eine der Haupterrungenschaften der Einsteinschen Theorie die „Befestigung der unerschütterlichen Idee des absoluten Raumes und der absoluten Zeit“ sei, und das, was zur Begründung dieses merkwürdigen Satzes gesagt wird, vielleicht nur eine neue Quelle der Verwirrung. Im übrigen kann das Büchlein, im Hinblick auf den Hauptteil seines Inhalts, doch nur jedermann, ganz besonders aber dem Techniker, der über die Grundbegriffe der Mechanik einmal nachdenken und seine Kenntnisse darin befestigen will, auf das Wärmste empfohlen werden. Mises. 45.

RUDOLF **MAYER,** Privatdoz. a. d. techn. Hochsch. Karlsruhe, Die Knickfestigkeit. Berlin 1921, J. Springer, 500 Seiten, 8°.

Obwohl die Theorie der elastischen Stabilität bereits in der Mitte des 18. Jahrhunderts von Leonhard Euler theoretisch einwandfrei für den geraden Stab ausgebildet ist, wurde ihr in der Literatur des bauenden Maschinenwesens bisher noch keine Monographie gewidmet, die allen wissenschaftlichen Anforderungen einerseits und den zahlreichen experimentellen Untersuchungen andererseits, wie sie bis zur Neuzeit durchgeführt sind, gerecht wurde. Der Verfasser dieser Schrift stellt sich prinzipiell auf den Standpunkt, daß gerade den exakten, theoretischen Untersuchungen und ihrer Wiedergabe in streng wissenschaftlicher Form ein hoher, erzieherischer Wert innewohnt, und daß nur auf diesem Wege die Grundlage zu einer einwandfreien und fruchtbringenden Kritik gelegt werden kann. Man kann ihm zustimmen, wenn er in dem Vorwort zu seiner Schrift sagt: „Nichts ist geeigneter, die Theorie in Mißkredit zu bringen, als die kritiklose Anwendung von Faustformeln und Berechnungsrezepten". Diesem Gesichtspunkt entsprechend gliedert sich der Inhalt der Monographie in zwei Teile, nämlich erstens in die Durchführung derjenigen Untersuchungen, die sich auf den geschichtlichen Grundlagen aufbauen (voller, gerader Stab, Gitter- und Rahmenstäbe und die Verwendung der theoretischen Resultate für den Brückenbau), und zweitens in die Wiedergabe und Kritik der zahlreichen Versuche über die Knickfestigkeit gerader, vollwandiger Stäbe. Dabei treten die Untersuchungen von Bauschinger, Tetmayer und Kármán in den Vordergrund. Der vollwandige Stab mit krummer Achse ist weniger eingehend behandelt, teils mit Rücksicht auf den geringeren Umfang der experimentellen Forschungen, vielleicht auch, weil die Wiedergabe der strengen, theoretischen Untersuchungen über die Knickbelastungen, wie sie namentlich in der Elastizitätstheorie von Love methodisch dargestellt sind, eine zu weitgehende Heranziehung der mathematischen Analyse erfordert hätten.

Im ganzen bietet das Werk dem nach theoretischer Vertiefung strebenden Bauingenieur und Maschinenbauer eine vorzügliche Einführung in die wissenschaftliche Erfassung eines — wenigstes im allgemeinen — abgeschlossenen Problems der technischen Mechanik und setzt ihn nach gründlichem Studium in den Stand, verwandte Probleme exakt aufzufassen, Näherungsmethoden rationell zu entwickeln und einen theoretischen Komplex klarer Begriffe auszubilden und aufzufassen und dadurch über die sogenannte technische Mechanik als ein praktisch teilweise mystisches System hinauszukommen und die wirkliche technische Mechanik erfolgreich zu fördern.

K. Heun. 52.

KLEINE MITTEILUNGEN

Lagerreibung unter Einfluß der Temperatur. Die vielfache Erörterung, die das Problem der Schmiermittelreibung in letzter Zeit wieder gefunden hat[1]), veranlassen mich, eine kleine Rechnung mitzuteilen, deren Ergebnisse schon früher veröffentlicht worden sind[2]) und die zeigt, daß die Reynolds-Sommerfeldsche Theorie mit den bekannten Versuchen von Stribeck[3]) in einem weit größeren Bereich übereinstimmt, als gewöhnlich angenommen wird.

Bekanntlich lassen sich die Ergebnisse der Theorie nach Sommerfeld wie folgt darstellen. Es bezeichne r den Halbmesser der umlaufenden Welle, s ihren Spielraum im umschließenden Lager, u die Umfangsgeschwindigkeit der Welle, η die Konstante der inneren Reibung des Schmiermittels und P die auf die Längeneinheit der Welle entfallende Belastung. Dann findet man für die Reibungszahl ψ, nämlich den Quotienten der Umfangskraft durch P, die Parameterdarstellung:

$$\psi = \frac{s}{r}\,\frac{1+2\varepsilon^2}{3\varepsilon} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\frac{\varepsilon}{(2+\varepsilon^2)\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \frac{1}{12\pi}\,\frac{P}{\eta u}\left(\frac{s}{r}\right)^2, \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1. \quad (2)$$

Es ist bekannt, in welcher Weise die praktische Verwertung dieser Gleichungen leicht möglich ist: Man betrachtet die Größe

$$x = \frac{\eta u}{P}\left(\frac{r}{s}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

als die maßgebende Veränderliche, rechnet zu verschiedenen, zwischen 0 und 1 liegenden, Werten von ε aus (2) das x, nämlich

$$x = \frac{(2+\varepsilon^2)\sqrt{1-\varepsilon^2}}{12\pi\varepsilon}, \quad \ldots\ldots (2')$$

aus (1) den Quotienten $y = \psi : \frac{s}{r}$ und erhält so eine — ein für allemal gültige — Kurve, die ψ in Einheiten von $s : r$ als Funktion von x darstellt. Diese Kurve stellt die vollständige Lösung des Problems dar. Es sei übrigens bemerkt, daß man als erste rohe Abschätzung in nicht zu weiter Entfernung vom Minimum (bei $x \sim 0{,}07$) etwa $y \sim 6{,}3\,x + \frac{0.033}{x}$ setzen darf, also

$$\psi \sim \frac{s}{r}\left[6{,}3\,\frac{\eta u r^2}{P s^4} + 0{,}033\,\frac{P s^2}{\eta u r^2}\right]. \quad \ldots (4)$$

[1]) Vgl. die Kurzen Auszüge, ds. Heft S. 220—23.

[2]) In dem Referat IV, 10 der Encyklop. der mathem. Wissenschaften, Dynamische Probleme der Maschinenlehre, Nr 19a, S. 296—299.

[3]) Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1902, S. 341 ff., und Mitteilungen über Forschungsarbeiten, Heft 7, Berlin 1903.

Bekanntlich stimmt die durch (1) und (2) gegebene Lösung des Problems grundsätzlich mit den Versuchsergebnissen überein, wenn man folgendes beachtet: 1. Der sehr kleine und schwer meßbare Wert des Spielraumes s wird nicht unmittelbaren Messungen, sondern den Beobachtungen über das Minimum von ψ (das ungefähr $s:r$ beträgt) entnommen; 2. beim Übergang zu $x=0$ verliert das Ergebnis an einer bestimmten Stelle seine Gültigkeit, an der das Negativwerden des Druckes anzeigt, daß die Schmierschichte auseinanderreißt und erst „halbtrockene", dann „trockene" Reibung eintritt; 3. bei größeren x spielt die Abhängigkeit der Zähigkeitszahl von der Temperatur eine wesentliche Rolle, so daß die für konstantes η berechnete x-y-Linie beträchtlich von der durch Beobachtung ermittelten abweicht.

Wir wollen nun zu Punkt 3 zeigen, daß auch wirklich zahlenmäßige Übereinstimmung zwischen Versuch und Theorie nahezu im ganzen Bereich der durch die Messungen umfaßten x-Werte besteht, wenn auf die Erwärmung des Lagers entsprechend Rücksicht genommen wird und nur die Versuche mit sehr geringer Lagerbelastung ausgeschieden werden. Zu diesem Zwecke halten wir uns an die unmittelbaren Versuchsergebnisse Stribecks, und nicht an die durch Interpolation bezw. Umrechnung auf konstante Temperatur entstandenen Schaubilder. In Abb. 10, S. 16 des Forschungsheftes[1]) gibt Stribeck zu den drei Belastungen $P=7$, 21 und 35 kg/cm und den fünf Umfangsgeschwindigkeiten $u = 23$, 70, 139, 279 und 403 cm/sec die Werte der beobachteten Reibungszahl ψ (als Ordinate der eingezeichneten Punkte) und die Werte der beobachteten Lagertemperatur (als beigefügte Ziffer) an. Mit der Annahme $r:s=269$, die wir dem bei allen Versuchsreihen übereinstimmenden Wert des $\psi_{\min}$ von rund 0,0035 entnehmen, lassen sich zu den in Abb. 10 abgelesenen ψ-Werten die Werte von $y=\psi r:s$ rechnen. Zu jedem y rechnen wir sodann nach (1) und (2) das zugehörige x, wobei für $y>1{,}5$ genau genug der asymptotisch richtige Ausdruck

$$x = \frac{1}{2\pi} y \left(1 - \frac{2}{9y^2}\right) \quad \ldots \ldots (5)$$

benutzt werden darf. Aus x bestimmen wir weiter, mit der Annahme $\eta = 10^{-6} Z$ (entsprechend einem annähernd dem des Wassers gleichen spezif. Gewicht des Öles) die Zähigkeitszahl Z, die dem Öl — unter der Voraussetzung, daß die Theorie richtig sei — zukommen müßte. Für die Abhängigkeit der Zähigkeit des Öles von der Temperatur gibt Stribeck die Englergrade E an:

$E =$	40,5	20,1	10,9	4,61	2,42	1,74

für die Temperaturen

$t =$	20⁰	30⁰	40⁰	60⁰	80⁰	100⁰ Cels.

Nach der von mir 1911 angegebenen Umrechnungsformel[2]) lassen sich aus Englergraden die Zähigkeitszahlen Z rechnen und zwar ergibt sich hier

$Z = 3{,}82 \quad 1{,}70 \quad 0{,}95 \quad 0{,}39 \quad 0{,}19 \quad 0{,}10 \text{ cm}^2/\text{sec}.$

Trägt man Z als Funktion von t auf, so kann man leicht zu jedem der oben aus den Versuchswerten berechneten „Sollwert" von Z die „theoretische" Temperatur des Öles bestimmen und sie der tatsächlich gemessenen Lagertemperatur gegenüberstellen. Wir finden so folgende Zahlen:

Geschwindigkeit u	23	70	139	279	403
1) Belastung $P=35$ kg/cm					
$y=\psi r:s$ . . .	1,00	1,60	1,60	1,60	1,60
$x=\eta u r^2 : P s^2$	0,10	0,23	0,23	0,23	0,23
$Z=10^6 \eta$ . . .	2,2	1,6	0,81	0,41	0,28
berechn. Temperatur des Öles	27⁰	31⁰	43⁰	59⁰	70⁰ C
beob. Temperatur des Lagers . . .	26,5⁰	29⁰	39,5⁰	56⁰	67⁰ „
2) Belastung $P=21$ kg/cm					
$y=\psi r:s$ . . .	1,26	2,34	2,70	2,24	2,08
$x=\eta u r^2 : P s^2$	0,17	0,36	0,42	0,34	0,31
$Z=10^6 \eta$ . . .	2,2	1,5	0,87	0,35	0,23
berechn. Temperatur des Öles	27⁰	32⁰	42⁰	63⁰	75⁰ C
beob. Temperatur des Lagers . . .	26⁰	28⁰	35,5⁰	53⁰	63⁰ „

Die Übereinstimmung innerhalb der ersten Versuchsreihe $P=35$ kg/cm erscheint vollkommen befriedigend, innerhalb der zweiten werden die Unterschiede bei den höheren Temperaturen schon etwas größer. Bei der dritten Versuchsreihe für eine Lagerbelastung von 1 kg/cm², ($P=7$ kg/cm) liegen die x-Werte zwischen 0,4 und 0,85 und hier ergibt die Rechnung durchschnittlich um 15⁰ höhere Öltemperaturen als die beobachteten Lagertemperaturen. Nun ist freilich zu bedenken, daß die arbeitende Ölschichte wärmer sein muß, als die die Wärme ableitende Lagerschale, ebenso wie diese wärmer ist als das im Außenraum des Lagers aufgespeicherte Öl — den Unterschied zwischen den beiden letzten Temperaturen hat Stribeck bis zu 8⁰ gefunden. Auch drängt sich jedem, der die Schaulinien in dem Stribeckschen Versuchsbericht betrachtet, der Eindruck auf, daß die Versuchsergebnisse bei geringeren Belastungen stark aus der Reihe herausfallen, so daß die Vermutung, es könnten hier irgendwelche Nebeneinflüsse, wenn nicht Versuchsfehler ins Spiel gekommen sein, nicht von der Hand zu weisen ist. Trotzdem wollen wir, um vorsichtig zu bleiben, das Ergebnis der vorstehenden Betrachtungen nur dahin zusammenfassen: daß die hydrodynamische Theorie der Lagerreibung in guter Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen steht bis zu einem Betrage des Kennwertes x, der etwa das 4- bis 5-fache des Minimum-Wertes 0,066 beträgt. **v. Mises. 60.**

[1]) Zeitschr. a. a. O. S. 1348.

[2]) Physik. Zeitschr. 12 (1911) S. 812—814; auch Elemente d. techn. Hydromechanik I, Leipzig 1914, S. 44 u. S. 184—186.

Graphische Bestimmung der Selbstinduktivität gerader zylindrischer Leiter beliebiger Querschnittsform. Zur Bestimmung der Selbstinduktivität eines geraden zylindrischen Leiters wird mit Vorteil der sogenannte „mittlere geometrische Abstand (= m. g. A.) seines Querschnittes von sich selbst“ eingeführt, dessen Bedeutung folgende ist: die Induktivität eines geraden zylindrischen Leiters von beliebigem Querschnitt ist gleich der gegenseitigen Induktivität von zwei geraden, unendlich dünnen parallelen Leitern, deren Abstand gleich dem m. g. A. des gegebenen Leiterquerschnittes von sich selbst ist. Es genügt also, den m. g. A. des Querschnittes zu bestimmen, um die Selbstinduktivität des Leiters angeben zu können.[1]

Der m. g. A. einer beliebig begrenzten Fläche F wird durch die Beziehung definiert

$$F^2 \ln g = \iint \ln z \, dF \, dF' = G(F, F) \quad \ldots (1).$$

dF und dF' sind zwei Elemente der Fläche F und z ihr Abstand; ln bezeichnet den natürlichen Logarithmus (es könnte natürlich mit beliebigen Logarithmen gerechnet werden), g den gesuchten m. g. A. Die Integration ist jedesmal über die ganze Fläche F durchzuführen. Ist l die Länge des Leiters, so ist die gegenseitige Induktivität von zwei geraden, parallelen, unendlich dünnen Leitern von derselben Länge l und dem Abstand g, also auch die gesuchte Selbstinduktivität des Leiters vom Querschnitt F, gegeben durch

$$L = l \ln \frac{\sqrt{l^2 + g^2} + l}{\sqrt{l^2 + g^2} - l} - 2\sqrt{l^2 + g^2} + 2g \quad (2),$$

oder wenn l groß ist im Verhältnis zu g, durch

$$L = 2l \left(\ln \frac{2l}{g} - 1 \right) \quad \ldots\ldots (3).$$

Wir wollen ein Verfahren zur zeichnerischen Bestimmung von g bei beliebigen, symmetrischen Querschnitten angeben.

In Anlehnung an Gl. (1) definieren wir eine Funktion $G(\alpha, \beta)$ für zwei Linienstrecken y_α, y_β durch

$$G(\alpha, \beta) = \iint \ln z \, dy_\alpha \, dy_\beta \quad \ldots (4),$$

wobei dy_α und dy_β Elemente der Strecken und z den Abstand der Elemente bedeuten. Die Integration ist einmal über y_α, einmal über y_β durchzuführen. Ebenso definieren wir eine Funktion $G(\alpha, F)$, die dem m. g. A. einer Strecke y_α und einer Fläche F voneinander entspricht

$$G(\alpha, F) = \iint \ln z \, dy_\alpha \cdot dF \quad \ldots (5).$$

Es bedeuten hierin dy_α und dF Elemente der Strecke bezw. der Fläche, und z den Abstand der Elemente, wobei die Integration einmal über die Strecke und einmal über die Fläche durchzuführen ist.

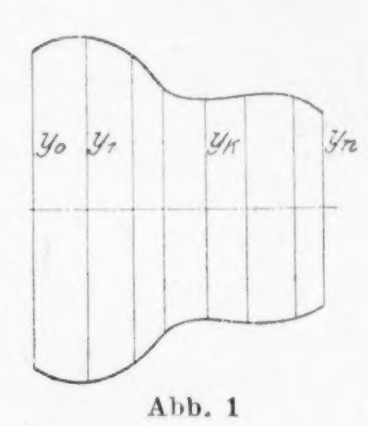


Abb. 1

Die Fläche F (Abb. 1), deren m. g. A. g zu bestimmen ist, wird durch eine Anzahl paralleler Strecken $y_0, y_1 \ldots y_n$ (in beliebigen Abständen) in n Teile geteilt. Für eine bestimmte, z. B. k-te Teilstrecke y_K, bestimmen wir die Werte von $G(\alpha, \beta)$ nach Gl. (4), in bezug auf alle übrigen Teilstrecken und auch in bezug auf sich selbst, d. h. $G(0, k)$, $G(1, k)$, $\ldots G(k, k) \ldots G(nk)$. Diese Werte werden als Ordinaten über eine beliebige Basis (Abb. 2) in entsprechender Reihenfolge und in Abständen der entsprechenden Teilstrecken

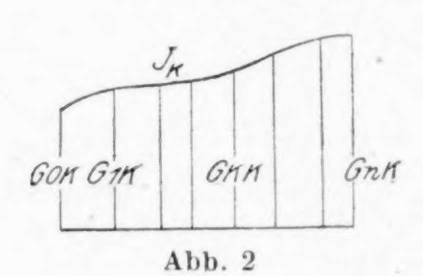


Abb. 2

aufgetragen und die so gewonnenen Punkte durch eine Kurve J_k verbunden. Die durch diese Kurve und die Basis sowie die Anfangs- und Endordinate begrenzte Fläche sei J_k. Sie gibt den Wert $G(k, F)$ an, welcher nach Gl. (5) dem m. g. A. der Strecke y_K und der Fläche F voneinander entspricht. Denn die Flächenbestimmung von J_k stellt eine Integration des Wertes von $G(\alpha, \beta)$, Gl. (4), dar, die den Wert von $G(\alpha, F)$, Gl. (5), liefert.

In ähnlicher Weise werden zu allen Strecken $y_0, y_1, \ldots y_n$ die Werte von $G(0, F)$, $G(1, F) \ldots G(n, F)$ bestimmt. Trägt man diese in beliebigem Maßstab über einer neuen Basis (Abb. 3) in entsprechenden Abständen und Reihenfolge als Ordinaten auf, so erhält

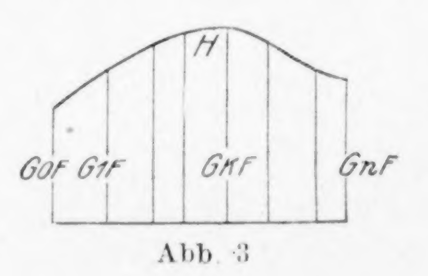


Abb. 3

man durch Verbindung der einzelnen Punkte eine Kurve H. Die von ihr begrenzte Fläche $\mathfrak{H}$ gibt den Wert von $G(F, F)$ an, der nach

[1] J. C. Maxwell, Lehrbuch d. Elektrizität u. d. Magnetismus, deutsche Ausgabe, Bd. II, Berlin 1883, §§ 691—692. — M. Wien, Ann. d. Phys. 1894, Bd. 54, S. 928. — J. Sumec, Elektrot. Zeitschr. 1906, S. 1175. — E. Orlich, ebda. 1908, S. 310. — E. Orlich, »Kapazität und Induktivität«, Braunschweig, 1909, S. 63.

Gl. (1) dem m. g. A. g der Fläche F von sich selbst entspricht. Denn durch diese letzte Flächenbestimmung ist eine Integration des Wertes $G(\alpha, F)$, Gl. (5), durchgeführt, was den Wert von $G(F, F)$ liefert. Ist der Flächeninhalt F bekannt, so geschieht der Uebergang von G zu g nach Gl. (1), d. h $\ln g = \frac{G}{F^2}$.

Als Grundaufgabe liegt also nur die Bestimmung von $G(\alpha, \beta)$ für zwei parallele Strecken mit gemeinsamer Symmetrieachse nach Gl. (4) vor.

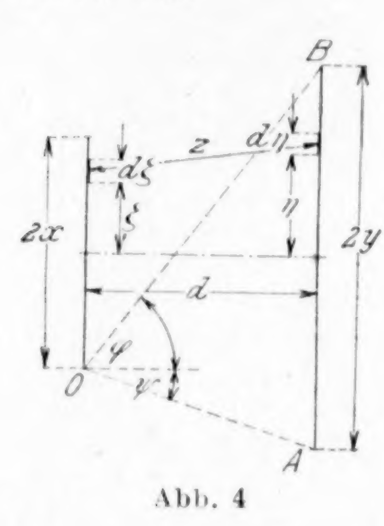


Abb. 4

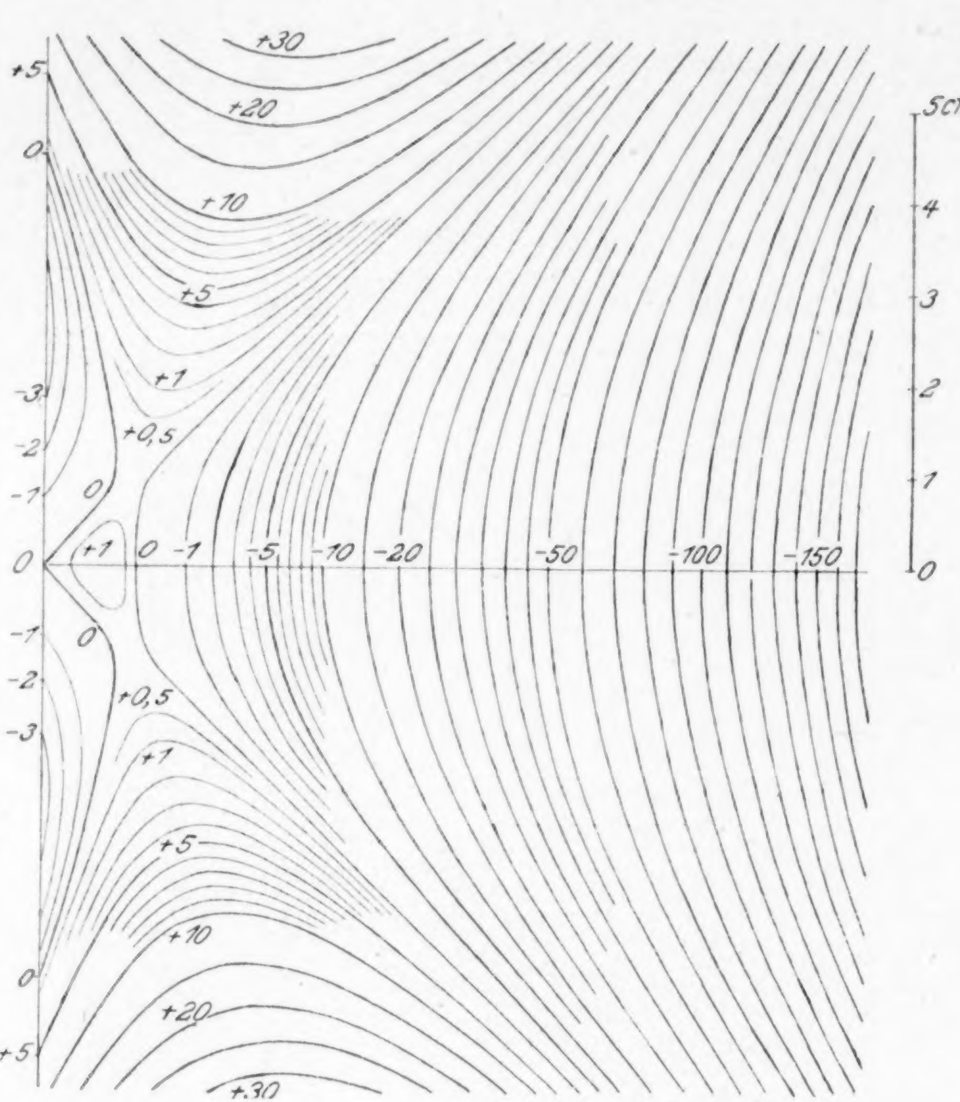
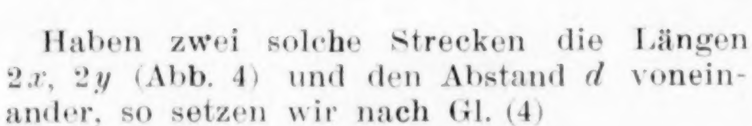


Abb. 5



Haben zwei solche Strecken die Längen $2x$, $2y$ (Abb. 4) und den Abstand d voneinander, so setzen wir nach Gl. (4)

$$2x \cdot 2y \cdot \ln g_{xy} = \int_{-x}^{+x} \int_{-y}^{+y} \ln z \, d\xi \, d\eta = G_{xy}.$$

$d\xi$ und $d\eta$ sind Elemente der beiden Strecken, und $z = \sqrt{d^2 + (\xi - \eta)^2}$ der Abstand der Elemente voneinander.

Dieses Integral läßt sich in geschlossener Form auswerten. Führen wir die Winkel φ und ψ (Abb. 4) durch

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{x+y}{d}, \qquad \operatorname{tg} \psi = \frac{x-y}{d}$$

ein, so erhalten wir

$$G_{xy} = p(\varphi, d) - p(\psi, d),$$

wobei die Funktion $p(\varphi, d)$ durch

$$p(\varphi, d) = d^2 \left[\frac{\cos 2\varphi}{\cos^2 \varphi} (\ln \cos \varphi - \ln d) + 2\varphi \cdot \operatorname{tg} \varphi - \frac{3}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi \right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

gegeben ist. Es wurden nach Gl. (6) Werte von p für verschiedene φ und d berechnet und Punkte gleicher p-Werte durch Linienzüge verbunden. Dadurch erhielt man ein Netz (Abb. 5), welches die Ablesung der p-Werte für jeden Punkt der Ebene gestattet. Wird das Netz auf ein durchsichtiges Deckblatt aufgetragen und mit dem Punkte O auf den Punkt O der Abb. 4 so aufgelegt, daß die vertikale Achse mit der Strecke $2x$ zusammenfällt, so geben die Ablesungen der p-Werte auf dem Netze bei den Endpunkten A, B der Strecke $2y$ in ihrer Differenz den gesuchten Wert G_{xy} an.

Ist der m. g. A. g einer Fläche F (Abb. 1) zu bestimmen, so wählen wir eine Anzahl zur Symmetrieachse senkrechter Teilstrecken y_0 bis y_n, von denen aber nur die unteren Endpunkte für die weitere Konstruktion notwendig sind. Das Netz (Abb. 5) wird auf die Fläche so aufgelegt, daß sein O-Punkt mit dem unteren Endpunkte von y_0 zur Deckung kommt und seine vertikale Achse senkrecht zur Symmetrieachse der Fläche liegt. In einer Nebenfigur (Abb. 6) werden die am oberen und unteren

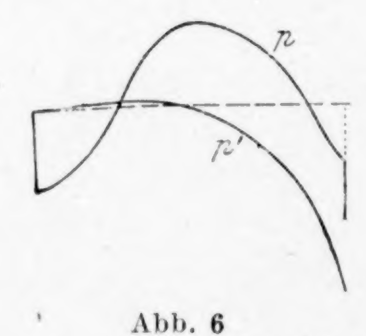


Abb. 6

Rande der Fläche abgelesenen Werte von p als Ordinaten in entsprechenden Abständen aufgetragen, wodurch man zwei Zweige p und p' der Kurve J_0 erhält. Dabei können so viele Randpunkte benutzt werden, wie es zur möglichst genauen Aufzeichnung der Kurve nötig erscheint. Wird die zwischen p und p' begrenzte Fläche mit dem Stift eines Planimeters umfahren, so kann aus der Ablesung

auf dem Planimeter und nach Berücksichtigung der gewählten Ordinatenmaßstäbe der Wert von $G(0, F)$ festgestellt werden.

Wird darauf das Netz parallel so verschoben, daß sein O-Punkt mit dem unteren Endpunkte von y_1 zur Deckung kommt, so kann in ähnlicher Weise ein Wert $G'(1, F)$ bestimmt werden, der nach Gl. (4) dem m. g. A. der Strecke y_1 und dem rechtsliegenden Teil der Fläche F voneinander entspricht. Dasselbe gilt für jede weitere Teilstrecke. Da aber $G(0, k) = G(k, 0)$, $G(1, k) = G(k, 1)$ usw. gilt, so genügt es, mit den unvollständigen Werten $G'(1, F)$, $G'(2, F)$ usw. weiterzurechnen und auch die Kurve H mit diesen zu konstruieren. Man hat zum Schluß nur den durchs Planimetrieren gefundenen Flächeninhalt $\mathfrak{H}$ mit 2 zu multiplizieren, um auf den gesuchten Wert $G(F, F)$ übergehen zu können, wobei wieder der gewählte Ordinatenmaßstab der Kurve H zu berücksichtigen ist.

Als erstes Beispiel soll die Bestimmung des m. g. A. einer Kreisfläche von sich selbst durchgeführt werden, damit eine Vergleichung des gefundenen Wertes mit dem rechnerisch ermittelten Wert möglich wird. In Abb. 7 sind die unteren Endpunkte 1 bis 9 der Teilstrecken y eingezeichnet. Da die Kreisfläche zwei senkrechte Symmetrieachsen besitzt, so brauchen keine weiteren Teilstrecken in der rechten Flächenhälfte benutzt werden. In der vorher beschriebenen Weise wurden die Kurven J_1, J_2 bis J_9 konstruiert, von denen in Abb. 7 der Uebersichtlichkeit wegen nur die erste und die letzte eingezeichnet sind. Jede von ihnen besteht aus zwei Zweigen p und p', die durch Ablesung der Werte am oberen und unteren Ende der Vertikalen auf dem Netze gewonnen wurden. Durch Planimetrieren der zwischen den Zweigen liegenden Flächen wurden Werte von $G(0, F)$, $G'(1, F)$ bis $G'(9, F)$ ermittelt, die als Ordinaten der Kurve H (Abb. 7 unten) aufgetragen wurden. Außerdem wurde bei jeder Kurve J_1 bis J_8 jene Fläche bestimmt, die zwischen der Anfangs- und Mittelordinate (9) durch die Kurvenzweige begrenzt wird. Die Flächen entsprechen dem m. g. A. der einzelnen Teilstrecken und der linken Kreishälfte voneinander. Im Ordinatenmaßstab der Kurve H wurden auch die diesen Flächen entsprechenden Strecken als Ordinaten aufgetragen, wodurch man die Kurve H' erhielt. Aus der doppelten Symmetrie der Kreisfläche folgt unmittelbar, daß die von H' begrenzte Fläche $\mathfrak{H}'$ den für die rechte Kreishälfte geltenden und infolge der Unterlassung der weiteren Teilstrecken fehlenden Teil der Kurve H genau ersetzt. (In Abb. 7 punktiert.) Die Fläche $\mathfrak{H}'$ ist also zur Fläche $\mathfrak{H}$ zuzuzählen und die Summe mit 2 zu multiplizieren. In der Originalzeichnung hatte der Kreis einen Radius $r = 3{,}49$ cm und es wurde $G(F, F) = 1469{,}4$ gefunden. Daher ist $\ln g = \frac{G(F, F)}{\pi^2 r^4} = \frac{1469{,}4}{\pi^2\, 3{,}49^4} = 1{,}0035$. Der genaue Wert des m. g. A. der Kreisfläche von sich selbst[1] ist $g = e^{-1/4} \cdot r$, also $\ln g = \ln r - 0{,}25 = \ln 3{,}49 - 0{,}25 = 1{,}0005$. Das graphische Verfahren ergab also für den ln des m. g. A. einen um 3 ‰ größeren Wert.

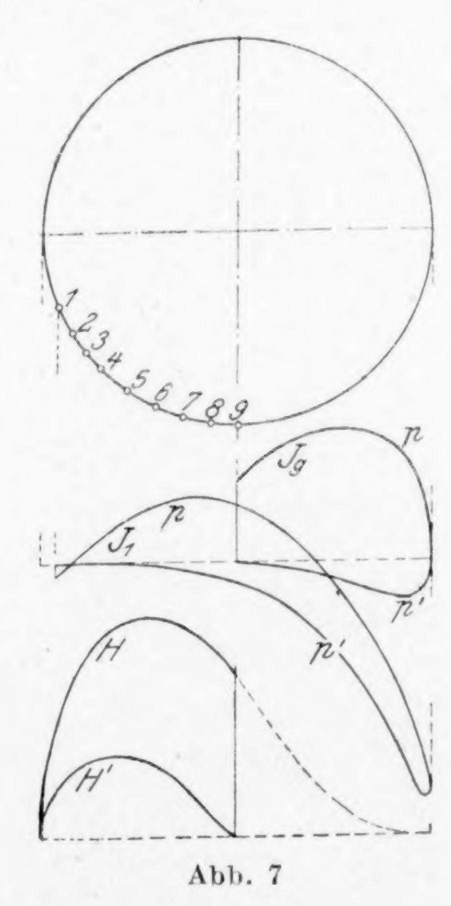


Abb. 7

Durch dieses Beispiel sollte die Anwendbarkeit und erzielbare Genauigkeit des Verfahrens vorgeführt werden. Im folgenden beschränken wir uns auf Angaben gefundener Werte des m. g. A. Für den Querschnitt Abb. 8 vom

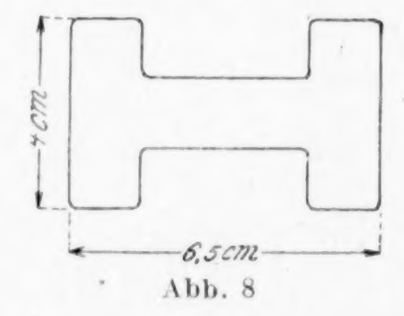


Abb. 8

Flächeninhalt $F = 17{,}026$ cm² wurde gefunden $G(F, F) = 249{,}25$. Es ist daher $\ln g = 249{,}25 : 17{,}026^2 = 0{,}8599$, oder $g = 2{,}363$. Für den Querschnitt Abb. 9 (Eisenbahnschiene)

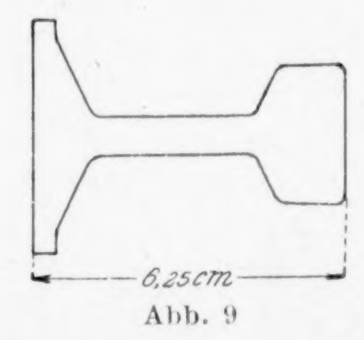


Abb. 9

wurde ermittelt $g = 2{,}220$. Der m. g. A. einer Kreisfläche vom äquivalenten Flächeninhalt wäre für den Querschnitt Abb. 8 $g = e^{-1/4} \cdot r = 0{,}7788 \sqrt{\frac{F}{\pi}} = 0{,}7788 \sqrt{\frac{17{,}026}{\pi}} = 1{,}812$. Bei

[1]) Orlich: »Kap. u. Ind.«, S. 66.

der Bestimmung der Selbstinduktivität eines Leiters von nicht kreisrundem Querschnitt darf daher nicht, wie es mitunter geschieht, mit einem äquivalenten Halbmesser $= \sqrt{\text{Fläche} : \pi}$ gerechnet werden, was natürlich zu erwarten war. J. Hak. 50

Zur Ausbildung der Oberlehrer an den technischen Hochschulen, ein neuer Vorschlag. Zu den Aumundschen Vorschlägen zur Reform der Technischen Hochschulen[1]) und zu den sich daran anschließenden Erörterungen von Hrn. Hamel[2]) möchte ich hier nur insoweit Stellung nehmen, als von ihnen auch die Ausbildung der Oberlehrer berührt wird. Es handelt sich dabei einmal um die Überzeugung von dem Bildungswert von Technik und Wirtschaft: Nach Aumund und nach Hamel tut es dringend not, daß unsere höherer Bildung zustrebende Jugend an dem Geist, der heutige Technik und Wirtschaft beseelt, nicht achtlos vorübergeht. Stimmt man dieser Überzeugung zu — und das soll hier geschehen — so erheben sich zwei wesentliche Probleme: 1) Wie bringt man diese Dinge im Unterricht zur Geltung? und 2) wie bildet man die für solchen Unterricht geeigneten Lehrer heran? Es soll auch hier nur von der zweiten Frage ausführlich die Rede sein. Die erste streife ich nur insofern, als allem folgenden diese prinzipielle Antwort darauf zugrunde liegt: Die Dinge kommen am besten verkoppelt mit dem Unterricht in Mathematik und Physik zur Geltung. Denn diese sind zum mindesten die allgemeinen wissenschaftlichen Grundlagen der Technik. Auf die zweite Frage nach der Ausbildung der Lehrer geben die genannten Schriften dann die Antwort: Den Technischen Hochschulen ist das Recht zur vollen Ausbildung der Oberlehrer in reiner und angewandter Mathematik sowie in den naturwissenschaftlichen Fächern zu verleihen. Gestattet nun aber der heutige Zustand der Technischen Hochschulen und die heutige Prüfungsordnung für Oberlehrer einen solchen Schritt? Diese Frage muß ich im Gegensatz zu den erwähnten Schriften, wenigstens was die Mathematik betrifft, mit einem glatten und bestimmten Nein beantworten. Die preußische Prüfungsordnung schreibt in § 20, neben den schon für Mathematik im Nebenfach geforderten Kenntnissen in den Elementen der analytischen Geometrie und der Infinitesimalrechnung, für Mathematik als Hauptfach vor: Bekanntschaft mit den Lehren der höheren Arithmetik und Algebra, der höheren Analysis und Geometrie, sowie mit den Grundlehren der theoretischen Mechanik. Der Kandidat muß eine angemessene Aufgabe aus jedem dieser Gebiete selbständig zu bearbeiten imstande sein. Übung im mathematischen Zeichnen und im numerischen Rechnen. Auf Beobachtung gegründete Kenntnis der Grundlehren der Astronomie. Und dazu noch § 10: Der Kandidat muß in den von ihm gewählten Fächern gründliche Studien getrieben haben und bei der Prüfung in seinen Hauptfächern besonders auch in seiner schriftlichen Hauptprüfungsarbeit beweisen, daß er, zu selbständigem wissenschaftlichen Urteil befähigt ist.

Mir scheint, es bedürfe keines besonderen Nachweises, daß die heutigen Lehrkräfte der Technischen Hochschulen unmöglich noch nebenher diese große Aufgabe bewältigen können, der die Universitätslehrer fast ihre ganze Kraft widmen. Und wenn vielleicht die Herren von der Technischen Hochschule daran erinnern sollten, daß nicht alle Kandidaten, die durchs Examen rutschen, glänzendes Zeugnis vom erreichten Ziel ablegen, so beweist das nur meinen Standpunkt, daß die Aufgabe schwer ist und nicht so nebenher erledigt werden kann. Vor allem glaube ich, haben die großen Hauptvorlesungen über höhere Mathematik an den Technischen Hochschulen in erster Linie das Ziel, eine gewisse Gewandtheit in der Handhabung mathematischer Methoden zu vermitteln — und ein großer Teil der Techniker wird, und das mit vollstem Recht, geradezu verlangen, daß es so sei. Man muß ja wohl auch die Aumundsche Forderung nach Vertiefung des mathematischen Unterrichtes an den Technischen Hochschulen dahin verstehen, daß eine immer weitergehende Anpassung auch der mathematischen Vorlesungen an die Bedürfnisse der Technik eintreten soll. Jedenfalls hält Hamel auch nach vollzogener Reform Ergänzungskurse zur Vertiefung der mathematisch-logischen Schulung für nötig. Ich stehe auf dem Standpunkt, daß zukünftige Oberlehrer mit Fakultas für reine Mathematik von vornherein im mathematischen Geist ihre Studien betreiben müssen und daß es nicht genügt, ihnen das eigentlich Mathematische als Ergänzung darzubieten. Dadurch könnte das von vornherein als minderwichtig erscheinen, was für die mathematische Schulung eine Hauptsache ist. Auch kann trotz „Ergänzung" das Ziel der entsprechenden Universitätsvorlesung unmöglich erreicht werden. An Stundenzahl steht die allgemeine (dreisemestrige) Vorlesung über „höhere Mathematik" der Universitätsvorlesung über Differential- und Integralrechnung ungefähr gleich. Der Stoff, der an der Universität darüber hinaus in Kursvorlesungen bewältigt wird, ist aber noch der zwei- bis dreifache. Was in etwa 24 Semesterstunden an analytischer Geometrie, Funktionentheorie, Algebra, Differentialgleichungen, Zahlentheorie (immer nur in den Elementen) geboten wird, kann nicht in drei bis vier zweistündige Ergänzungskurse hineingepreßt werden. Spezial-

[1]) Aumund, Die Hochschule für Technik und Wirtschaft, Berlin 1921; vgl. auch den Auszug in Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 65 (1921), S. 137—145. Der Vorstand dieses Vereines hat sich den Aumundschen Vorschlägen angeschlossen. Vgl. ebda., S. 507—508.

[2]) Vgl. diese Zeitschrift 1 (1921), S. 77—79.

vorlesungen werden ja hier wie dort noch gehalten; aber an den Technischen Hochschulen müssen oder müßten diese ja wohl in erster Linie den vielfachen mathematischen Bedürfnissen der modernen Technik dienen. Freilich stehen neben der Vorlesung mehr Übungen als an der Universität. Das belegt aber nur aufs neue meine Meinung, daß es da mehr auf die nützliche Erwerbung der Sicherheit in der Handhabung mathematischer Methoden als auf logisch mathematische Schulung ankommt. Auf dem Wege, das ist meine feste Meinung, wird man in reiner Mathematik nur Dilettanten, keine wissenschaftlichen Persönlichkeiten heranbilden.

Wenn also die Technischen Hochschulen wirklich in die Lage versetzt werden sollen, für die heutige Fakultas in reiner Mathematik vollwertige Kandidaten auszubilden, so, scheint mir, müßten die Lehrkräfte um ein beträchtliches vermehrt werden. Man müßte für teures Geld neue Professoren anstellen, die sich vornehmlich dieser Aufgabe widmen. Denn wollten sich die vorhandenen noch mehr als bisher der mathematischen Ausbildung von Oberlehrern widmen, so würden sie allzu stark ihrer doch völlig andersartigen Hauptaufgabe entzogen werden: Die richtig verstandenen mathematischen Bedürfnisse des zukünftigen Ingenieurs sind nun einmal andere als die eines zukünftigen Mathematikers.

Betrachten wir nun die Fakultas für angewandte Mathematik. Ich halte es für selbstverständlich, daß sich mit leichter Mühe die Technischen Hochschulen auf die Ausbildung der Kandidaten zu dieser Fakultas werden einstellen können. Denn die Prüfungsordnung schreibt vor: Von den Kandidaten, welche angewandte Mathematik als Zusatzfach wählen, ist außer der Lehrbefähigung in Mathematik (mindestens als Nebenfach) zu fordern: Weitergehende Beherrschung der zeichnerischen und numerischen Methoden (darstellende Geometrie, graphisches und numerisches Rechnen, Ausgleichungsrechnung) und ihre Verwendung in mindestens einem der folgenden Gebiete: 1. Astronomie, 2. Geodäsie, 3. Meteorologie und Geophysik, 4. angewandte Mechanik, 5. angewandte Physik, 6. mathematische Statistik und Versicherungswesen.

Mit Recht werden nun aber die Mathematiker an den Technischen Hochschulen sagen: Das genügt nicht, zu uns werden nur wenige zukünftige Oberlehrer kommen, wenn sie nicht bei uns ihr ganzes Studium absolvieren können. Aus dieser richtigen Erkenntnis heraus ist denn wohl auch die unberechtigte und undurchführbare Forderung entstanden, die ich gerade zurückgewiesen habe.

Andererseits habe ich es auch oben als berechtigt anerkannt, daß technische Dinge im Unterricht zur Geltung kommen. Nun würde es ebenso unerschwingliche Gelder kosten, die Universitäten mit entsprechenden Instituten auszurüsten, wie es unerschwinglich wäre, die Technischen Hochschulen in Stand zu setzen, den Bestimmungen der heutigen Prüfungsordnung in reiner Mathematik nachzukommen. Es wird auch praktisch wenig Erfolg haben, die Studenten an beiden Anstalten lernen zu lassen. Der Weg steht ja schon heute offen, der Erfolg aber ist unzureichend, wie ich gerne anerkenne.

Meines Erachtens bleibt daher nur ein, bisher nirgends genannter, Weg offen. Man gestalte die Fakultas für angewandte Mathematik so aus, daß ein Oberlehrer, der sie besitzt, allen den Ansprüchen genügt, die man an einen Lehrer stellen muß, der auf den oberen Klassen Mathematik unterrichten soll. Ich bin der Ansicht, daß dazu die folgenden Anforderungen ausreichen würden: Der Kandidat soll sichere Kenntnisse auf jedem der oben in der Fakultas für angewandte Mathematik genannten sechs Gebiete besitzen. Er soll darüber hinaus aber die mathematischen Grundlagen der Anwendungen in weiterem Maße beherrschen, als das bisher für angewandte Mathematik gefordert wird, und er soll sie auch so beherrschen müssen, daß er sich über die wissenschaftlichen Grundlagen des Schulunterrichtsstoffes klar ist. Ich will mich absichtlich mit dieser ungefähren Umreißung begnügen. Man müßte wohl zum mindesten die Elemente der Höheren Algebra und Geometrie neben einer sicheren Beherrschung der höheren Analysis verlangen. Jedenfalls glaube ich, daß man hier mit Anforderungen auskommen würde, denen einmal die Technischen Hochschulen ohne kostspielige Neueinrichtungen gewachsen sind und die andererseits eine genügende Grundlage für den rein mathematischen Unterricht auf höheren Klassen geben würde. Dazu sind es nur die Dinge, die man von jemanden, der in der angewandten Mathematik perfekt sein will, ohnedies fordern muß. Die jetzige Prüfungsordnung scheint mir da viel zu lax zu sein. Die sechs angewandten Gebiete könnten dann durch Zufügung einzelner technischer Gebiete noch erweitert werden und außerdem wären von allen diesen Kandidaten allgemeine Kenntnisse über Technik und Wirtschaft zu fordern.

Dieses neu einzurichtende Hauptfach: Angewandte Mathematik könnte dann im allgemeinen nur an den Technischen Hochschulen studiert werden. Den Universitäten bleibt das Studium der reinen Mathematik wie bisher vorbehalten. An den Universitäten könnte angewandte Mathematik höchstens im bisherigen Umfang als Zusatzfach (oder Nebenfach) studiert werden, wie auch daran zu denken wäre, um der Form der Prüfungsordnung zu genügen, daß an den Technischen Hochschulen die in den Anforderungen für angewandte Mathematik eingeschlossene reine Mathematik als ein Nebenfach zählt. Den Schulen wäre durch diese reinliche Scheidung ein großer Dienst erwiesen. Sie haben dann gut ausgebildete reine Mathematiker und gut ausgebildete angewandte Mathematiker zur Verfügung. Da ferner erfahrungsgemäß Begabungen in bei-

den Richtungen zugleich sehr selten sind, so wäre diese reinliche Scheidung auch psychologisch richtig. Übrigens könnte man zur Vermeidung möglicher Härten in der gegenseitigen Anrechnung von Semestern weiter gehen als bisher.

In der Promotionsfrage wäre meines Erachtens nach den gleichen Grundsätzen zu verfahren: Angewandte Mathematik kann Promotionsfach an Technischen Hochschulen sein, niemals aber reine Mathematik.[1])

Bieberbach. 56

NACHRICHTEN

Ehrung von Karl Heun. Rektor und Senat der Technischen Hochschule Charlottenburg haben auf Antrag der Allgemeinen Abteilung dem ordentlichen Professor der Mechanik an der Technischen Hochschule in Karlsruhe, Dr. Karl Heun die Würde eines Dr.-Ing. Ehrenhalber verliehen „als dem hervorragenden Gelehrten, der die heutige Entwicklung der angewandten Mathematik und Mechanik mit begründen half und sich dadurch auch um die technischen Wissenschaften bleibende Verdienste erworben hat". Karl Heun, im Jahre 1859 zu Wiesbaden geboren, promovierte 1881 als Mathematiker in Göttingen[1]) und habilitierte sich 1884 in München an der Universität. Er war nach verschiedenen früheren Stellungen Oberlehrer in Berlin bis zum Jahre 1902, in dem er seine gegenwärtige Stellung in Karlsruhe mit einer Antrittsrede „Über die Einwirkung der Technik auf die Entwicklung der theoretischen Mechanik"[2]) antrat. Heun hat sich hauptsächlich bekannt gemacht durch sein im Jahre 1897 der Deutschen Mathematiker-Vereinigung erstattetes Referat „Die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik"[3]). Darin sind zum ersten Mal alle jene Probleme des Maschinenbaus und der Fahrzeugtechnik, die früher nur in zerstreuten Einzelschriften behandelt worden waren, von einem allgemein wissenschaftlichen Gesichtspunkt aus zusammengefaßt. Es war Heun auf Grund jahrelangen eingehenden Studiums der damals in Deutschland nur wenig bekannten Lagrangeschen Mechanik möglich geworden, die von einzelnen hervorragenden Technikern wie Grashof, Radinger u. a. gegebenen Lösungen in den Rahmen der rationellen Systemmechanik einzuordnen und so die Tragweite der bisherigen Ergebnisse bedeutend zu erweitern. Ganz besonders hat er sich bemüht, die allgemeine Methode Lagranges zur Berechnung der Beanspruchung bewegter Maschinenteile (Kinetostatik[4])) den wissenschaftlich arbeitenden Technikern zu vermitteln. Von einem groß angelegten Lehrbuch der Mechanik ist im Jahre 1916 nur der erste Band „Kinematik mit einer Einleitung in die elementare Vektorrechnung"[2]) erschienen. Wir wollen der Hoffnung Ausdruck geben, daß es Heun und uns vergönnt sein möchte, dieses schöne und originelle Werk, wie auch noch manche andere von ihm im Laufe der Jahre in Angriff genommene Arbeit bald und glücklich vollendet zu sehen.

[1]) Die Kugelfunktionen und Laméschen Funktionen als Determinanten. Inaug. Diss. Göttingen 1881.

[2]) Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver. 12 (1903) 389—398.

[3]) Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver. 9 (1897), auch Leipzig bei Teubner 1897.

[4]) Die Grundgleichungen der Kinetostatik der Körperketten mit Anwendungen auf die Mechanik der Maschinen. Zeitschr. f. Math. u. Phys. 56 (1908) 38—77.

Die angewandte Mathematik auf der Jahresversammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Der Ausschuß der Deutschen Mathematiker-Vereinigung hat beschlossen, im September ds. Js. in Jena gemeinsam mit der Tagung der Deutschen Physikalischen Gesellschaft eine Jahresversammlung abzuhalten. Bekanntlich haben seit vielen Jahren die Herbsttagungen dieser beiden Gesellschaften im Rahmen der großen Versammlungen Deutscher Naturforscher und Ärzte stattgefunden, innerhalb deren in einer besonderen Sektion die Angewandte Mathematik, Technische Physik usf. vertreten war. Die allgemeine Naturforscher-Versammlung fällt in diesem Jahre aus. Die Verhandlungen der Mathematiker-Vereinigung werden hauptsächlich zusammenfassenden Referaten über die Fortschritte der verschiedenen Gebiete in den Kriegsjahren gewidmet sein. In einer besonderen Sitzung werden Referate und Vorträge aus den einzelnen Zweigen der Angewandten Mathematik gehalten werden. Bisher haben angemeldet: Dr. Jaffé, Leipzig, Bericht über neuere, hauptsächlich ausländische, Arbeiten in der Hydrodynamik, Prof. Ludwig Föppl, Dresden, Bericht über Fortschritte der Elastizitätslehre, Dr. Hencky, Dresden, Bericht über die numerische Bearbeitung der Differentialgleichungen in der Mechanik, Prof. v. Kármán, Aachen, Vortrag über laminare und turbulente Flüssigkeitsreibung, Dr. Hopf, Aachen, Vortrag über Grundwasserströmung. 59

[1]) Hr. Prof. Hamel, dem diese Mitteilung zur Kenntnisnahme vorgelegen hat, behält sich eine Aeußerung für spätere Gelegenheit vor.

[2]) Sammlung Schubert, Band 37, Leipzig 1906.

(Redaktionsschluß 27. Juni 1921.)

Druckfehler-Berichtigung. In dem Aufsatz H. Hencky in Heft 2 soll es S. 83 oben in Gleichung 7c heißen: $\Delta^2_{xy}\zeta$ und $\Delta^2_y\zeta$ statt $\Delta_{xy}\zeta$ bezw. $\Delta_y\zeta$.

Druck von A. W. Schade, Berlin N. 39.